गणिती गप्पा



वा. के. वाड

गणिती गप्पा

वा. के. वाड

राजा प्रकाशन

प्रकाशिका
सौ. शुभदा मुळे
राजा प्रकाशन
२२५/३ पांडुरंग भुवन, ले. ज. रोड, माहीम,
शिवाजी पार्क, मुंबई ४०००१६
फोन : २४३००४०३
पुणे कार्यालय : ५ लक्ष्मीप्रसाद अपार्टमेंट,
निंबाळकर तालमीशेजारी, सुजाता कोल्ड्रींक समोर,
सदाशिव पेठ, पुणे ३०. फोन : (०२०) २४४७४२४३
□

□
मुद्रक
श्री अंबिका ऑफसेट
वडगाव बु. ॥, पुणे – ४११०४१.
□
अक्षरजुळणी
एच. एम. एण्टरप्रायझेस
पुणे - ४११ ०३०
□
मुखपृष्ठ
कुणाल रेगे
□
नवीन आवृत्ती : १२ सप्टेंबर २०१२
□
प्रकाशन क्रमांक : १४४
□
ISBN - 81-7424-044-6
□

मनोगत

प्रस्तुत पुस्तकात साध्या विनोदी गप्पा नाहीत, गणिती गप्पा आहेत. साध्या गप्पांमध्ये विनोदाच्या साहृयाने वाचकांचे मनोरंजन करणे हा प्रधान उद्देश असतो. या गणिती गप्पांमध्ये थोडाफार विनोद आहे, नाही असे नाही; पण त्याचबरोबर या गप्पांमधून शाळा-कॉलेजांच्या अभ्यासक्रमाबाहेरचे गणित आहे; पण ते वरच्या दर्जाचे मात्र नाही.

गणित हा रुक्ष विषय आहे असे पुष्कळांना वाटते. गणिताचे अध्यापन बहुतांशी कंटाळवाणे होते. या गप्पांचा उद्देश जरी गणित शिकवण्याचा नसला, तरी गणिताचे अध्यापन कसे रोचक करता येते, याचा काही ठिकाणी प्रत्यय येईल, असा विश्वास आहे. अर्थातच गणिताची रंजकता हा या गप्पांचा गाभा आहे. तसे असले तरी वाचकांच्या बुद्धीला खाद्य पुरविण्याचे भान ठेवले आहे.

आमच्या 'गणिताशी गट्टी' या पुस्तकाचे जसे स्वागत झाले, तसेच या पुस्तकाचेही स्वागत होईल, अशी खात्री आहे.

—लेखक

अनुक्रम

1. ABC आणि BAC

इंग्रजी भाषेचा अभ्यास सुरू होतो तो A, B, C ह्या मुळाक्षरांपासून. गणिताचा अभ्यास सुरू होतो संख्या आणि त्यांच्यावर करता येणाऱ्या बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार या प्राथमिक क्रियांपासून.

गुणाकाराची क्रिया आपणास नीटपणे समजली आहे की नाही, याबाबतची कसोटी आपली आपणच घेऊ या. त्यासाठी खाली एक गुणाकाराचे उदाहरण दिले आहे. त्यामध्ये अंक नाहीत, संख्या नाहीत. अंकांऐवजी काही अक्षरे व तारे दिलेले आहेत. ते अंक शोधून काढण्यासाठी काही प्रश्न व सूचना दिल्या आहेत. ते उदाहरण नेहमीप्रमाणे अंकांमध्ये सोडवण्याचा प्रयत्न करा.

```
        A B C
      x B A C
  -------------
      * * * *
      * * A
  * * * B
  -------------
  * * * * * *
```

मार्गदर्शक प्रश्न व सूचना :

1) A, B आणि C यांपैकी सर्वांत लहान अंक A हा आहे. कशावरून?
2) A च्या कोणकोणत्या किमती असणे शक्य आहे?
3) A च्या शक्य त्या किमतींपैकी फक्त एकच किंमत या उदाहरणात योग्य आहे. ती किती हे दुसऱ्या पोटगुणाकारावरून निश्चित होते.
4) A ची किंमत ठरली की C ची किंमत ठरविता येते. कशी?
5) A व C यांच्या किमती योग्य ठिकाणी लिहून B ची किंमत कशी निश्चित करायची ते ठरवा.

2. हॅपी बर्थ-डे

आपल्या मित्राचा किंवा मैत्रिणीचा जन्मदिनांक, महिना व वर्ष कोणते हे सांगता आले, तर किती मजा येईल, नाही? त्यासाठी खालील प्रयोग करून पाहा.

येथे जमलेल्या माझ्या मित्रमंडळींपैकी कोणाचीही जन्मतारीख, महिना व वर्ष मी सांगू शकते (तो) अशी प्रस्तावना करून इच्छुक मित्रमैत्रिणींना कागद-पेन्सिल द्यावी आणि म्हणावे, 'तुम्ही थोडीशी आकडेमोड केल्यावर मी तुमची जन्मतारीख सांगेन. आता मी सांगते (तो) त्याप्रमाणे थोडी आकडेमोड करा; पण लक्ष देऊन बरोबर करा बरं!'

'तुमच्या जन्मतारखेला 20 ने गुणा व गुणाकारात 3 मिळवा. झालं का? ठीक. आलेल्या बेरजेला 5 ने गुणा. त्या गुणाकारात आपल्या जन्माच्या महिन्याचा क्रमांक मिळवा. बेरजेला 20 ने गुणा व गुणाकारात 3 मिळवा. एवढं झालं का? तपासून बघा बरं बरोबर आहे की नाही ते. आता आलेल्या बेरजेला 5 ने गुणा व गुणाकारात जन्माच्या सालाची दोन अंकी संख्या मिळवा. (म्हणजे 1985 हे जन्माचे साल असेल तर 85 मिळवायचे). शेवटी कोणती संख्या आली ती एकेकाने मला सांगा.'

या संख्येवरून इच्छुकाची जन्मतारीख, महिना व साल सांगता येण्यासाठी त्या संख्येतून 1515 वजा करा, म्हणजे क्रमाने तारीख, महिना व साल देणारी संख्या मिळेल.

एक-दोन उदाहरणे घेऊ.

अलकाची जन्मतारीख 12 ऑगस्ट, 1988 आहे. तिने 12 ची 20 पट करून 3 मिळविले की 243 येतील. या संख्येला 5 ने गुणून महिन्याचा क्रमांक 8 मिळविल्यानंतर 1223 येतील. या संख्येला 20 ने गुणून 3 मिळविल्यावर 24,463 येतील. या संख्येला 5 ने गुणून जन्मसाल 88 मिळविल्यावर शेवटी 122403 ही संख्या अलका आपल्याला सांगेल. 122403 मधून 1515 वजा केल्यावर 120888 ही संख्या मिळते. या संख्येतील

शेवटचे दोन अंक जन्मसाल देतात, त्याच्या मागचे दोन अंक 08 ह माहेन्याचा क्रमांक देतात व त्याच्या मागचे दोन अंक 12 ही जन्मतारीख देतात. (कधीकधी शेवटी एकच अंक उरेल हे ध्यानात घ्या.)

सुहासची जन्मतारीख 5 डिसेंबर, 1978 आहे. त्याने केलेल्या आकडेमोडीत खालील संख्या क्रमाने येतील.

5, 100, 103, 515, 527, 10540, 10543, 52715 व शेवटी 52793.

शेवटच्या संख्येतून 1515 वजा केल्यावर 51278 ही संख्या आपल्याला मिळेल. ही संख्या 5-12-78 सुहासची जन्मतारीख देते की नाही?

वरील उदाहरणांतील 122403, 52793 या संख्यांवरून जन्मतारखा कशा सांगता येतात याचा उलगडा प्रेक्षकांना सहजासहजी होणार नाही. त्यामुळे तुम्ही एक तर ज्योतिषी असाल, नाहीतर मनकवडे, नाहीतर जादूगार!

इच्छुक प्रेक्षकाने सांगितलेल्या संख्येतून 1515 वजा केल्यावर जन्मदिनांक, महिना व वर्ष यांच्या संख्या का मिळतात, हे शोधून काढा.

3. लफंगे

श्री. व सौ. लफंगे आपल्या आडनावाप्रमाणे 'लफंगे' नाहीत. श्री. लफंगे विनोदी मात्र जरूर आहेत. आपल्या विवाहाची रजतजयंती साजरी करावी, म्हणून सौभाग्यवतीला छानशी उंची साडी खरेदी करायचे ठरले होते.

दुपारचे पक्वान्नाचे चमचमीत जेवण अंगावर आले होते. म्हणून दोघांनीही दोन तासांची वामकुक्षी घेतली. चार वाजता चहापान झाल्यावर दोघेही बाहेर पडले व आपल्या नेहमीच्या कापडाच्या दुकानात गेले.

विक्रेत्याने सौ. लफंग्यांना बनारसी, कांजीवरम, पटोला वगैरे पुष्कळ प्रकारच्या साड्या काढून दाखवल्या; पण कोणतीच साडी त्यांच्या पसंतीला उतरली नाही. तेव्हा श्रीयुत विक्रेत्याला म्हणाले, "थोड्या आणखी उंची साड्या काढून दाखवा." सौभाग्यवतींचा चेहरा खुलला.

गार्डन सिल्कची शिफॉन साडी शेवटी पसंत पडली. 450 रुपयांचे बिल देऊन दोघे घरी परतले. शेजारच्या विशालताईंना सौ. लफंगे यांनी नवी साडी दाखविली. विशालताईंचे नावाप्रमाणेच सर्व काही 'विशाल' असायचे. त्यांना ती साडी मुळीच पसंत पडली नाही. त्या म्हणाल्या, "इश्श. लग्नाच्या पंचविसाव्या वाढदिवसाला घेऊन घेतलीत तर ही कसली साडेचारशेची साडी घेतलीत? आमच्या ह्यांनी गेल्याच महिन्यात माझ्या वाढदिवसाला कित्ती कित्ती छान कोरियन साडी आणली! फार हौशी आहेत हो आमचे हे! चक्क पावणेनऊशे मोजले त्यांनी त्या दिवशी."

"खरं की काय म्हणता? बघू दे तरी." सौ. लफंगे सौ. विशालताईंच्या घरी जाऊन आपल्या ह्यांना दाखविण्यासाठी त्यांची साडी घेऊन आल्या. रात्री साडीच्या प्रश्नावरून हवा गरम झाली. पण करतात काय बिचारे लफंगे. दुसऱ्या दिवशी साडी बदलून आणण्याच्या अटीवर तडजोड झाली. "तुम्ही उद्या सकाळी एकटेच जा, मी नाही येणार. ती गार्डन बदलून हिच्यासारखी तुमच्या पसंतीच्या रंगाची कोरियन साडी आणा." ए.सी.च्या गारठ्यात वादळ शमले.

दुसऱ्या दिवशी सकाळी लवकर उठून सर्व आन्हिके आटोपून श्री. लफंगे

साडी बदलण्यासाठी दुकानात गेले. ''साडी बदलायची आहे,'' असे सांगून त्यांनी ती साडेचारशेची साडी परत केली व सौभाग्यवतीने सांगितल्याप्रमाणे कोरियन साड्यांपैकी एक पसंत केली. साडीवरची किमतीची चिट्ठी पाहिली. 'नऊशे रुपये.' विक्रेत्याजवळ किमतीबाबत थोडा वाद झाला. ''अहो, गेल्याच महिन्यात आमच्या शेजाऱ्यांनी अगदी हीच साडी पावणेनऊशेला तुमच्याच दुकानातून घेतली!''

''खरं आहे ते! पण एक तारखेपासून किमती अडीच टक्क्यांनी वाढल्या आहेत. मिलवाल्यांनीच वाढविल्या आहेत. पाच तारखेची खरेदीची पावती काढून दाखवू?''

''बरं, जाऊ द्या. चांगल्या पिशवीत घालून द्या.'' साडी घेऊन श्री. लफंगे दुकानाबाहेर पडणार एवढ्यात कॅशियरने त्यांना हटकले व साडेचारशेची मागणी केली.

''साडेचारशे? कसले साडेचारशे? काल मी साडेचारशे रुपये रोख दिले. तुम्हीच होता कॅशवर. आज साडेचारशेची साडी नाही का दिली? दोन्ही मिळून नऊशे नाही का झाले? आता कसलं देणं लागतो मी तुमचं?'' श्री. लफंगे कडाडले, पण हसतहसतंच.

श्री. लफंगे यांच्या वरील तार्किकात चूक कोणती ते सांगाल का?

4. नऊ पत्त्यांची जादू

पत्त्यांच्या जोडातील एका रंगाची एक्का, दुरी, तिरी, ...ते नववीपर्यंतची पानें घेऊन विकासने प्रेक्षकांना दाखविली व तो म्हणाला, "तीन मित्रांनी पुढे यावं. हां, अलका तू, दिनू तू व गीता तू. अलका, तुझ्यापासून सुरुवात करू. तू हे पत्ते घेऊन कसेही पीस व त्यांपैकी एक पत्ता काढून तो लक्षात ठेव आणि तो पुन्हा त्या ढिगात ठेव. दिनू व गीता, तुम्हीही एकेक पत्ता काढून तो लक्षात ठेवा."

"अलका, आता ही कागद-पेन्सिल घेऊन आपल्या पत्त्यावरील ठिपक्यांच्या संख्येला 2 ने गुणून गुणाकारात 1 मिळव. बेरजेला 5 ने गुण व कागद-पेन्सिल दिनूला दे."

दिनूकडे कागद-पेन्सिल आल्यावर विकास दिनूला म्हणाला, "अलकानं केलेल्या शेवटच्या गुणाकारात तुझ्या पत्त्यावरील ठिपक्यांची संख्या मिळव. बेरजेला 2 ने गुणून गुणाकारात 1 मिळव. आलेल्या बेरजेला 5 ने गुणून कागद-पेन्सिल गीताकडे दे."

गीताला विकास म्हणाला, "दिनूनं शेवटी केलेल्या गुणाकारात तू निवडलेल्या पत्त्यावरील ठिपक्यांची संख्या मिळव. बेरजेला 2 ने गुणून गुणाकारात 1 मिळव. बेरजेला 5 ने गुण व शेवटी आलेला गुणाकार किती तो मला सांग."

"4165", गीताने शेवटचा गुणाकार सांगितला.

विकासने 4165 मधून मनातल्या मनात काहीतरी पुटपुटत जाहीर केले, "अलकानं तिरी निवडली होती, दिनूचा पत्ता होता छक्का व गीतानं सर्वांत मोठा पत्ता म्हणजे एक्का निवडला होता. बरोबर?"

तिघा मित्रांनी काढलेले पत्ते विकासने बरोबर सांगितल्यामुळे सर्व प्रेक्षकांनी 'हिप हिप हुर्रे' करून त्याचे अभिनंदन केले.

विकासला सांगितलेल्या 4165 या संख्येवरून त्याने तिघांनी काढलेले पत्ते कसे ओळखले?

दोन किंवा चार प्रेक्षकांनी पत्ते काढण्यात भाग घेतला, तर त्यांनी काढलेले पत्ते कसे ओळखता येतील?

5. संख्यांचा एक खेळ

दिवाळीच्या सुटीचे दिवस होते. सुलूचे आई-वडील बाहेरगावी गेले होते. त्यामुळे रान मोकळे होते. सुलेखाने आपल्या मैत्रिणींना खेळायला बोलाविले होते. पाच-सहा मैत्रिणी जमल्या होत्या. गप्पांना बहर आला होता, सिनेमातल्या गाण्यांच्या भेंड्या झाल्या. त्या वेळी भांडणेही झाली. दुपारचे बारा वाजायला आले. ओरडून ओरडून तोंडे दुखू लागली व पोटात कावळे कावकाव करू लागले. दुपारच्या जेवणाचा बेत सुलूने नामी केला होता; पण त्याचे वर्णन करीत नाही. उगीच आपल्या तोंडाला पाणी सुटायचे!

जेवणखाण आटोपल्यावर सर्व आवराआवर करून पुन्हा मैत्रिणींच्या गप्पा सुरू झाल्या. सुलू म्हणाली, "मी तुम्हांला संख्यांची एक जादू करून दाखविते."

"हां, हां, चालेल," सर्व मैत्रिणींनी एकच गलका केला.

"चला तर. अलका, ही घे कागद-पेन्सिल आणि मला न दाखविता एक तीन अंकी संख्या लिही. तिन्ही अंक निरनिराळे हवेत. तेच तीन अंक त्याच क्रमाने लिहिलेल्या संख्येच्या पुढे लिही, म्हणजे सहा अंकी संख्या तयार होईल. मला न दाखविता कागद-पेन्सिल आता रेखाला दे."

रेखाने कागद-पेन्सिल घेतल्यावर सुलू तिला म्हणाली, "त्या सहा अंकी संख्येला 7 ने भाग. चुकू नकोस हं, भागाकार बरोबर कर."

रेखाचा भागाकार झाल्यावर सुलून विचारले, "बाकी किती उरली?"

"शून्य!"

"ठीक आहे. आता कागद-पेन्सिल प्रज्ञाला दे. प्रज्ञा, तू आलेल्या भागाकाराला 11 ने भाग; पण त्यापूर्वी रेखानं केलेला भागाकार बरोबर आहे की नाही, ते तपासून पाहा."

प्रज्ञाने प्रथम रेखाने केलेला भागाकार तपासला. तो बरोबर होता. त्या भागाकार-संख्येला तिने 11 ने भागले.

"प्रज्ञा, झाला भागाकार? बरोबर केलास ना? बाकी किती आली?"

"बाकी शून्य!"

"अरे वा! अलकानं कोणती तरी जादूची संख्या लिहिली असावी. नाहीतर दोघींच्या बाक्या शून्य कशा येतील? प्रज्ञा, आता कागद-पेन्सिल विद्याला दे. विद्या, प्रज्ञानं केलेला भागाकार तपासून पाहा. बरोबर असल्यास त्या भागाकाराला 13 ने भाग आणि या चिटोऱ्यावर आलेला भागाकार लिही व चिटोरे घडी करून मला दे."

सुलूने विद्याकडून चिटोरे घेतले व आपल्या जागेकडे येताना मैत्रिणींच्या पाठमोरी असताना हळूच चिटोरे उघडून पाहिले व त्याची होती तशीच घडी करून ते टेबलावर ठेवले. नंतर ती मैत्रिणींना म्हणाली,

"पाहा बरं, सर्व काही तुम्हीच केलंत. मला त्यातलं अक्षरही माहीत नाही. अलकानं लिहिलेली तीन अंकी संख्या कोणती होती, माहीत आहे? **सातशे पंच्याण्णव!** बरोबर आहे का अलका?"

"अरे वा! अगदी बरोबर ओळखलीस की!" इति अलका.

"पण ती संख्या तू कशी काय ओळखलीस? सांग ना!" सर्व मैत्रिणींनी एकच गलका केला.

"त्यात काहीच कठीण नाही. घरी गेल्यावर तुम्ही पण एक तीन अंकी संख्या लिहा. तीच संख्या तिच्यापुढे लिहा, म्हणजे सहा अंकी संख्या तयार होईल. तुमची प्रत्येकीची संख्या निरनिराळी असेल. आपण लिहिलेल्या संख्येला 7 ने भागा, आलेल्या भागाकाराला 11 ने भागा. पुन्हा आलेल्या भागाकाराला 13 ने भागा. शेवटचा जो भागाकार येईल तो तुम्हाला धक्का देईल."

"हे सर्व आम्ही करून पाहू; पण अलकाची संख्या तुला कर्णपिशाच्च्यानं सांगितली का?" इति मैत्रिणी.

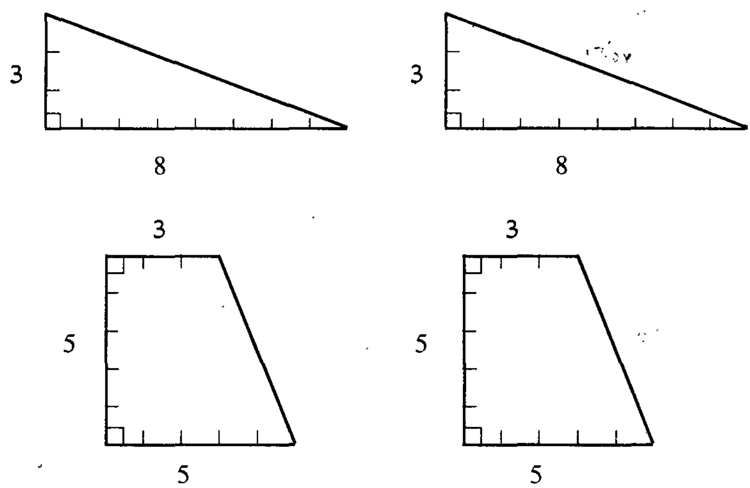
"होय. मी फक्त थोडीशी हातचलाखी केली. विद्याकडून घेतलेलं चिटोरं टेबलाकडे जाताना मी उघडून पाहिलं. मी पाठमोरी असल्यामुळे तुम्हाला ते दिसलं नाही. विद्यानं जो भागाकार चिटोऱ्यावर लिहिला होता, तीच अलकाची तीन अंकी संख्या."

"पण हे कसं काय शक्य आहे?" मैत्रिणींची पृच्छा.

मैत्रिणींच्या पृच्छेचे उत्तर तुम्हाला देता येते का? प्रयत्न करून पाहा.

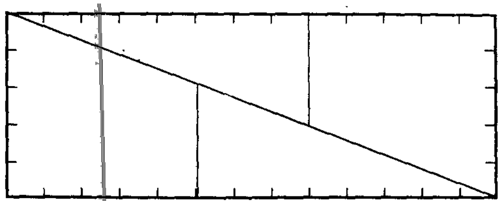
6. चोरी! चोरी!!

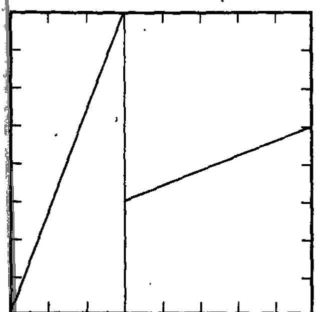
आलेख पत्रावर खाली दाखविल्याप्रमाणे दोन एकरूप काटकोन त्रिकोण व दोन एकरूप समलंब चौकोन काढा. काटकोन त्रिकोणांच्या काटकोन करणाऱ्या बाजू 3 व 8 एकक घ्या. समलंब चौकोनांमध्ये दोन काटकोन व समांतर बाजू 3 व 5 एकक घ्या व त्यांमधील अंतर 5 एकक घ्या.



साधारणपणे पोस्टकार्डाएवढ्या जाडीच्या कार्डावर चारही आकृत्या चिकटवा, म्हणजे त्या हाताळण्यास सोयीचे होईल. त्या आकृत्या नंतर कापून घ्या. खाली दाखविल्याप्रमाणे आकृत्या एकमेकींना जोडून एक आयत किंवा एक चौरस **बनविता** येईल.

आता चोरी कोठे झाली आहे ते पाहा. आयताच्या संलग्न बाजू 13 व 5 एकक लांबीच्या आहेत. त्यामुळे त्याचे क्षेत्रफळ 13 × 5 = 65 चौरस एकक होते.





दिलेले चार तुकडे चौरसाकृतीत बसविले, तर त्या चौरसाची बाजू 8 एकक असल्यामुळे त्या चौरसाचे क्षेत्रफळ $8^2 = 64$ चौरस एकक होते.

आयत व चौरस त्याच चार आकृत्या जोडून तयार केले असल्यामुळे त्यांची क्षेत्रफळे समान असली पाहिजेत; पण आयताचे क्षेत्रफळ चौरसाच्या क्षेत्रफळापेक्षा 1 चौरस एककाने जास्त झालेले **दिसते.** मग चौरस तयार करताना एका चौरस एककाची चोरी झाली की काय? कोणी केली असावी ही चोरी?

टी. व्ही. वर 'कमांडर', 'टायगर' वगैरेसारख्या अनेक जासूसी मालिका (डिटेक्टिव्ह सिरीयल्स) तुम्ही पाहात असाल! मग तुम्ही 'कमांडर' होऊन

'65 = 64'

ही केस हातत घेऊन त्या केसची तलाशी कराल का? पाहा जमते का!

7. एक पैज

शालेय स्पर्धांमधील किंवा आपल्या परिसरातील गणपती उत्सव, शारदोत्सव अशा प्रकारच्या उत्सवांनिमित्त होणाऱ्या स्पर्धांमधील बटाटा-शर्यतीत तुम्ही कधी भाग घेतला होता का? भाग घेतला नसला तरी अशी शर्यत पाहिली असेल.

शंभू आणि गंपू दोघे मित्र – अगदी जिवास जीव देणारे! दोघेही एकाच शाळेत जात असत, एकाच व्यायामशाळेत जाऊन व्यायाम करीत. सायकल-सहलीत दोघांची जोडी असायचीच. ते राहत असलेल्या परिसरातील सार्वजनिक गणेशोत्सवानिमित्त होणाऱ्या स्पर्धांमध्ये दोघेही भाग घेत असत व पहिला किंवा दुसरा क्रमांक पटकावीत असत. थोडक्यात, शंभू आहे तेथे गंपू असायचाच आणि गंपू आहे तेथे शंभू ठरलेलाच!

एक दिवस शंभूच्या मनात थोडीशी अढी आली. तो गंपूला म्हणाला, "येत्या सार्वजनिक गणेशोत्सवात होणाऱ्या बटाटा-शर्यतीत भाग घेणार ना? त्या स्पर्धेसाठी आतापासूनच सराव सुरू केला पाहिजे; पण सराव सुरू करण्यापूर्वी आपण एक पैज लावू."

"पैज? आणि आपल्या दोघांत? आपल्या मैत्रीचं कोणाच्या तरी डोळ्यांत सलत असलं पाहिजे. कोणी भरवलंय हे पैजेचं वेड तुझ्या डोक्यात?"

"तसं नाही रे! आपल्या दोघांत फूट पाडायची कोणाची माय व्यालीय? सहज आपलं माझ्या मनात आलं की आपण दोघांत एक शर्यत लावू या," इति शंभू.

"तुझं म्हणणंच असेल तर माझी काही हरकत नाही?" गंपूने थोड्याशा नाराजीतच संमती दिली. "पण कसली शर्यत आणि कसली पैज?"

"मी म्हणतो की वीस बटाट्यांची शर्यत तू जेवढ्या वेळात संपवशील, **त्यापेक्षा कमी वेळात** मी चारशे पावलं चालून दाखवीन," इति शंभू.

"हो, कबूल; पण पैज कसली?"

"हरणाराने जिंकणाराला पावभाजी खायला घालायची!" शंभूचा खुलासा.

"आपल्या दोघांतसुद्धा पावभाजी गरम पडेल. हल्ली साधारणपणे बऱ्यापैकी पावभाजीलासुद्धा अठरा-वीस रुपये पडतात. शिवाय, या शर्यतीला क्रमीत कमी

दोन पंच लागतील– एक तुझी 400 पावलं किती वेळात होतात ते पाहण्यासाठी व दुसरा मी 20 बटाटे किती वेळात आणून एका टोपलीत जमा करतो ते पाहण्यासाठी. त्या पंचांना नको का पावभाजी खायला घालायला?''

''मग आपण बटाटावड्यावरच भागवू या!''

''ठीक. आता कसा स्वर्गातून जमिनीवर आलास?'' गंपूने टोमणा हाणलाच.

पैजेचा दिवस ठरला. नंदू आणि बंडू यांना पंच म्हणून काम करण्याची विनंती करण्यात आली. ते एका पायावर तयार झाले, कारण कोणी का जिंकेना, त्यांचा बटाटेवडा निश्चित होता.

रिकाम्या टोपलीपासून एकेक पाऊल अंतरावर एकेका लहानशा परडीत एकेक बटाटा ठेवला होता. रिकाम्या टोपलीपासून 400 पावलांच्या अंतरावर नंदू स्टॉप वॉच घेऊन उभा राहिला. बंडू रिकाम्या टोपलीजवळ शर्यत सुरू करण्याच्या पवित्र्यात उभा राहिला. शंभू व गंपू रिकाम्या टोपलीच्या दोन अंगांना तयार होऊन उभे राहिले. बंडूने 'रेडी' होण्याची शिटी दिली. दोघेही स्पर्धक पहिले पाऊल टाकण्याच्या तयारीत राहिले. बंडूने 'रेडी, गेट सेट ॲन्ड गो' म्हणून दुसरी शिटी वाजविली. त्याबरोबर नंदू व बंडू यांनी आपली स्टॉप वॉचेस सुरू केली. शर्यत सुरू झाली.

शंभू व गंपू सारख्याच वेगाने पावले टाकीत होते व दोघांच्या दर दोन पावलांतील अंतर सारखेच होते, असे गृहीत धरून ती शर्यत कोणी जिंकली असावी, ते सांगा.

'काय म्हणालात? थोडी आकडेमोड करावी लागेल? करा, काय पाहिजे ते करा आणि पैज कोणी जिंकली ते सांगा.'

'ज्याला कमी पावलं चालावी लागतील तो जिंकेल. गंपूला किती पावलं चालावं लागेल ते काढावं लागेल. ते काढण्यासाठी वेळ लागेल.'

'थोडक्या वेळात उत्तर काढण्यासाठी आम्ही मदत करतो ना! पहिला बटाटा आणून टोपलीत टाकण्यासाठी 2 पावलं (टोपलीपासून पहिल्या बटाट्यापर्यंत जाण्यास एक पाऊल व परत येण्यास एक पाऊल अशी दोन पावलं) चालावं लागेल. दुसरा बटाटा आणून टाकण्यास 2 + 2 = 4 पावलं, तिसरा बटाटा आणण्यास 6 पावलं लागतील, ...इत्यादी. अशा या संख्यांची बेरीज चटकन कशी करायची हे समजण्यासाठी आमचे 'गणित-छंद भाग 1 ला' या पुस्तकातील पहिलंच प्रकरण वाचा. आता होऊ द्या तुमची उत्तर काढण्याची शर्यत!'

8. चकत्यांचा खेळ

खाली दिलेल्या चौरसात 1 ते 25 संख्या अशा तऱ्हेने लिहिल्या आहेत की, प्रत्येक आडव्या, उभ्या तसेच कर्णांच्या ओळीतील संख्यांची बेरीज 65 आहे. त्यामुळे तो बेरजेचा चौरस आहे. केवळ बेरजेचा जादूचा चौरस नाही, तर त्यामध्ये आणखी काही विशेष आढळून येतो. खंडित कर्णांमधील संख्यांची बेरीज केली तरी ती 65 च येते, असे दिसून येईल. पाहा.

6	4	22	20	13
17	15	8	1	24
3	21	19	12	10
14	7	5	23	16
25	18	11	9	2

4+8+12+16+25=65, 22+1+10+14+18=65,
20+24+3+7+11=65, 13+17+21+5+9=65,
6+18+5+12+24=65, इत्यादी.

वरील चौरसाच्या या गुणधर्मावर आधारित असा एक खेळ तयार करू या.

साधारणपणे जाडशा कार्डामधून, खाली दाखविलेल्या आकृतीत आहेत तशा पाच चकत्या कापून घ्या. त्या क्रमाने (म्हणजे सर्वांत मोठ्या चकतीवर तिच्यापेक्षा थोडी लहान, तिच्यावर आणखी थोडी लहान,...)

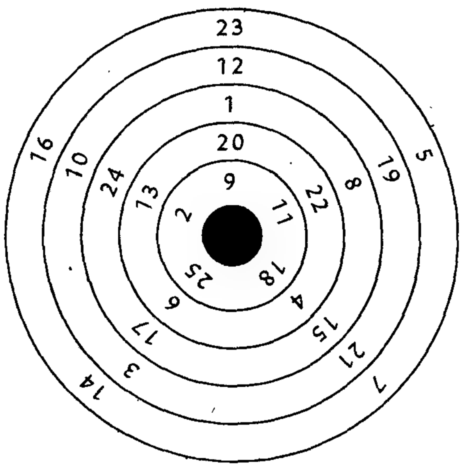
एकीवर एक अशा रीतीने ठेवा की, त्यांचे केंद्रबिंदू बरोबर एकावर एक येतील. त्या केंद्रामधून एक रिव्हेट ठोका. मात्र सर्व चकत्या त्या रिव्हेटभोवती

फिरतील अशी काळजी घ्या.

एकमेकींशी 72 अंशांचा कोन करणाऱ्या पाच त्रिज्या नंतर पुसून टाकता येण्यासाठी पेन्सिलीने काढा. या त्रिज्यांवर खालील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे वरील चौरसाच्या एकेका स्तंभात असलेल्या संख्या लिहा. प्रत्येक त्रिज्येवर असलेल्या संख्यांची बेरीज 65 असेल, हे उघड आहे. यापेक्षा विशेष म्हणजे, मळसूत्रासारख्या मार्गाने (Spirally) असणाऱ्या संख्यांची बेरीज केली तरी ती 65 च येईल. पाहा.

20+24+3+7+11 = 65, 22+15+3+16+9=65, ...इत्यादी. हे विशेष प्रेक्षकांना दाखवा. त्यांना आश्चर्य वाटेल.

आता, त्या चकत्या उलटसुलट अशा फिरवा की, त्रिज्यांवर लिहिलेल्या



संख्या एका रेषेत येणार नाहीत. मग ते चक्र प्रेक्षकांपैकी एखाद्याला देऊन त्याला प्रत्येक ओळीतील संख्यांची बेरीज 65 आणून दाखव, असे सांगावे.

अशा तऱ्हेची जास्त चक्रे तयार केली तर जास्त व्यक्तींना प्रयत्न करून पाहण्यास देता येतील. त्यांच्यामध्ये स्पर्धा लावता येईल. **शालेय क्रीडास्पर्धांमध्येही अशी स्पर्धा ठेवता येईल.**

एकेका ओळीतील संख्यांची बेरीज 65 आणून दाखविणे हे काम तसे सोपे नाही. नशिबाचा हात असेल तर एखादी व्यक्ती झटकन करून दाखवीलही; पण एकंदरीत मजेशीर खेळ होईल.

आपणास कोणी आव्हान दिले, तर आपण काय करावे, याची युक्ती शोधा.

9. तीन तेरा!

(+1)	(-1)	(+3)	(-3)	(+9)	(-9)	(+27)
I	II	III	IV	V	VI	VII
1	2	2	5	5	14	14
4	5	3	6	6	15	15
7	8	4	7	7	16	16
10	11	11	14	8	17	17
13	14	12	15	9	18	18
16	17	13	16	10	19	19
19	20	20	23	11	20	20
22	23	21	24	12	21	21
25	26	22	25	13	22	22
28	29	29	32	32		23
31	32	30	33	33		24
34	35	31	34	34		25
37	38	38		35		26
40		39		36		27
		40		37		28
				38		29
				39		30
				40		31
						32
						33
						34
						35
						36
						37
						38
						39
						40

या प्रकरणाचे नाव वाचून बुचकळ्यात पडलात का? 'तीन तेरा' कोणाचे? आपले नक्कीच नाहीत, याची खात्री बाळगा.

वर जो तक्ता दिला आहे, तो गणिती जादू करण्यासाठी वापरायचा आहे. तसा तक्ता तयार करा. मात्र या तक्त्यांत (+1), (-1), (+3),... इत्यादींची जी अगदी वरची ओळ आहे ती तयार करायच्या तक्त्यात आणू नका. त्या संख्या आपण लक्षात ठेवायच्या म्हणजे जादू करताना त्यांचा उपयोग होईल. I, II, III,... इत्यादी स्तंभांच्या त्या किमती आहेत, असे समजा.

ही जादू 'तीन' या संख्येचे 0, 1, 2 व 3 या घातांवर आधारलेली आहे. 3 च्या घात-संख्यांची बेरीज-वजाबाकी करून 1 ते 40 या संख्या कशा लिहिता येतात, ते ध्यानात घ्या.

$$3^0 = 1, \quad 3^1 = 3, \quad 3^2 = 9, \quad 3^3 = 27.$$

1 ते 40 संख्यांपैकी काही संख्या 3 च्या वरील घातसंख्यांत लिहून दाखविल्या आहेत.

$$1 = 3^0$$
$$2 = 3 - 1 = 3^1 - 3^0$$
$$3 = 3^1 7$$
$$5 = 9 - 3 - 1$$
$$= 3^2 - (3)^1 - (3)^0$$

$$12 = 9 + 3 = 3^2 + 3^1$$
$$20 = 27 - 9 + 3 - 1$$
$$= 3^3 - 3^2 = 3^1 - 3^0$$
$$35 = 27 + 9 - 1$$
$$= 3^3 + 3^2 - 3^0$$

आता तक्ता पाहा. 4 ही संख्या तक्त्यातील कोणकोणत्या स्तंभांत आहे? I व III या स्तंभांत. त्या स्तंभांच्या किमती अनुक्रमे (+1) आणि (+3) आहेत. या किमतींची बेरीज 4 आहे की नाही?

20 ही संख्या II, III, VI व VII या स्तंभांत आहे. त्या स्तंभांच्या किमती अनुक्रमे (-1), (+3), (-9) व (+27) अशा आहेत. या किमतींची बैजिक बेरीज 20 येते की नाही ते ताडून पाहा.

जादू करण्यासाठी तयार केलेला तक्ता प्रेक्षकाला द्या. त्याला 1 ते 40 पैकी एक संख्या मनात धरायला सांगा. ती संख्या दिलेल्या तक्त्याच्या कोणकोणत्या स्तंभांत आहे, ते विचारावे. समजा त्याने धरलेली संख्या II, IV व VII या स्तंभांत आहे, असे प्रेक्षकाने सांगितले. आपण या स्तंभांच्या किमती आठवायच्या. त्या अनुक्रमे (-1), (-3) व (+27) अशा आहेत. या किमतींची बेरीज 23 येते. म्हणून प्रेक्षकाने मनात धरलेली संख्या 23 आहे, असे सांगता येते.

आता सरावासाठी खालील प्रश्न सोडवा.

1) मी मनात धरलेली संख्या IV, VI व VII या स्तंभांत आहे, तर ती संख्या कोणती?
2) एकताने 32 ही संख्या मनात धरली, तर ती कोणकोणत्या स्तंभांत असली पाहिजे, हे तक्ता पाहिल्याशिवाय सांगा.
3) वीणाने 38 ही संख्या मनात धरली व ती II, V व VII या स्तंभांत आहे, असे सांगितले, तर तिची संख्या अचूकपणे का सांगता येणार नाही?

* आमच्या 'गणिताशी गट्टी' या पुस्तकातील 6 वे प्रकरण वाचा.

10. नाण्यांच्या दोन बाजू

प्रत्येक 'नाण्याला दोन बाजू असतात' अशी एक प्रचलित म्हण आहे. या म्हणीला जो अलंकारिक अर्थ आहे, तो या प्रकरणात आपण विचारात घेणार नाही. त्या म्हणीचा सरळसरळ जो शब्दार्थ आहे त्याचा उपयोग आपण करणार आहोत. निरनिराळ्या किमतींची सहा नाणी आपल्याजवळ असतील, तर दुसऱ्याने मनाने धरलेली 1 ते 60 पर्यंतची संख्या आपणास ओळखता येईल.

ही जादू करता येण्यासाठी आपणास एक सहकारी हवा. तो सहकारी व आपण यांनी ठरविलेला एक संकेत नीट समजून वापरला तर ही जादू बिनचूक करता येईल.

पाच पैसे, दहा पैसे, वीस पैसे, पंचवीस पैसे, पन्नास पैसे व एक रुपया अशा किमतीचे एकेक अशी सहा नाणी घ्या. आपण व आपला सहकारी यांनी खालील संकेत नीट ध्यानात ठेवावा.

नाण्याचा छाप (head) वरच्या बाजूस असेल, तर त्याची किंमत खालीलप्रमाणे मोजायची व **काटा (tail) वरच्या बाजूस असेल तर शून्य** धरायची.

पाच पैशांच्या नाण्याचा छाप वर असेल, तर त्याची	किंमत 1.
दहा पैशांच्या नाण्याचा छाप वर असेल, तर त्याची	किंमत 2.
वीस पैशांच्या नाण्याचा छाप वर असेल, तर त्याची	किंमत 4.
पंचवीस पैशांच्या नाण्याचा छाप वर असेल, तर त्याची	किंमत 8.
पन्नास पैशांच्या नाण्याचा छाप वर असेल, तर त्याची	किंमत 16.
रुपयाच्या नाण्याचा छाप वर असेल, तर त्याची	किंमत 32.

आपला सहकारी व इच्छुक (संख्या मनात धरणारा) एका खोलीत बसतील व आपण शेजारच्या खोलीत बसावे. सहकाऱ्याने इच्छुकाला 1 ते 60 पैकी एक संख्या मनात धरायला सांगावी व आवाज होऊ नये म्हणून ती कागदावर लिहून दाखविण्यास सांगावे व कागद पाहून सहकाऱ्याने इच्छुकाला परत करावा.

नंतर आपला सहकारी वरच्या संकेताप्रमाणे ज्या नाण्यांच्या किमतीची बेरीज इच्छुकाच्या संख्येएवढी येईल त्या नाण्यांचे छाप वरच्या बाजूला व राहिलेल्या

नाण्यांचे काटे वरच्या बाजूला येतील, अशा रीतीने नाणी मांडून ठेवील व आपणास त्या खोलीत येण्याचा इशारा करील. ज्यांचे छाप वरच्या बाजूला आहेत त्या नाण्यांच्या वरील संकेताप्रमाणे असणाऱ्या किमतींची बेरीज करावी व इच्छुकाने मनात धरलेली संख्या सांगावी.

समजा, राहुलने 35 ही संख्या मनात धरली व आपल्या सहकाऱ्याला लिहून दाखविली. 35 = 32 + 2 + 1 असल्यामुळे आपला सहकारी पन्नास पैसे, दहा पैसे व पाच पैसे या नाण्यांचे छाप व राहिलेल्या नाण्यांचे काटे वर असतील अशी नाण्यांची मांडणी करील व आपणास खोलीत येण्याचा इशारा करील. सोपी आहे की नाही जादू?

नाण्यांची मांडणी करताना त्यांच्या चढत्या अगर उतरत्या क्रमाने न करता वेडीवाकडी करावी. म्हणजे आपली जादू इतरांच्या लक्षात येणार नाही. ही जादू झटकन करता येण्यासाठी कोणत्या नाण्यांचे छाप वर ठेवायचे हे सहकाऱ्याच्या लगेच ध्यानात आले पाहिजे. त्यासाठी मोठ्या किमतीच्या नाण्यापासून सुरुवात करावी. इच्छुकाने 27 ही संख्या धरली असेल, तर 27 = 16 + 8 + 2 + 1 असल्यामुळे 50 पैसे, 25 पैसे, 10 पैसे व 5 पैसे या नाण्यांचे छाप वरच्या बाजूस असले पाहिजेत. 12 ही धरलेली संख्या असेल, तर 25 पैसे व 20 पैसे या दोनच नाण्यांचे छाप वरच्या बाजूला दिसले पाहिजेत.

सरावासाठी खालील प्रश्न सोडवा :

1) खालील संख्यांसाठी सहकाऱ्याने कोणत्या नाण्यांचे छाप वर ठेवावेत?
   (a) 8, (b) 17, (c) 45, (d) 53.
2) खालीलप्रमाणे नाण्यांची मांडणी असेल, तर कोणत्या संख्यांसाठी त्या मांडण्या असतील हे ओळखा.
   (a) पन्नास पैसे, पंचवीस पैसे व वीस पैसे या नाण्यांचे छाप वरच्या बाजूला असलेली मांडणी.
   (b) पाच पैसे व पंचवीस पैसे या नाण्यांचे काटे वरच्या बाजूस ठेवलेली मांडणी.

* आमच्या 'गणिताशी गट्टी' या पुस्तकातील पाचवे प्रकरण वाचा. त्यातील आशय व या प्रकरणाचा आशय सारखाच असल्याचे आढळून येईल. ही दोन्ही प्रकरणे 'द्विमान पद्धतीतील संख्यां'वर आधारलेली आहेत.

11. प्रश्नपंढरी

'युगे अठ्ठावीस विटेवरी उभा!' भक्तांचा कैवारी पंढरीचा विठोबा **युगान्‌युगे** कटीवर हात ठेवून विटेवर उभाच आहे. गणितातील कूटप्रश्नांचीही तीच गत आहे. जगाच्या निरनिराळ्या भागांत त्याच त्याच प्रकारचे प्रश्न अतिप्राचीन काळापासून प्रचलित आहेत. देशकालानुरूप त्यांचे स्वरूप थोडेफार निराळे असेल. या कूटप्रश्नांची थोडीशी झलक या प्रकरणात दाखविण्याचा मानस आहे. मात्र हे कूटप्रश्न देताना आम्हीही त्या प्रश्नांना आधुनिक साज चढविण्याचा प्रयत्न केला आहे. पाहा तर थोडासा नमुना.

(1) एका विश्वव्यापी व बहुद्देशीय कंपनीने तीन देशांशी व्यापार केला. पहिल्या देशात जो माल पाठविला, त्याच्या उत्पादन खर्चाच्या दुप्पट रकमेला तो माल विकला. आलेल्या रकमेपैकी तीन लाख रुपये जाहिरातींवर खर्च करून राहिलेल्या किमतीची सौंदर्यप्रसाधनें खरेदी करून ती दुसऱ्या देशाला खरेदीच्या किमतीच्या तिप्पट किमतीला विकली. आलेल्या रकमेतून पाच लाख चाळीस हजार रुपये एजंटांचे कमिशन, जाहिराती वगैरे अनुषंगिक बाबींवर खर्च करून उरलेल्या रकमेची औषधे खरेदी करून ती तिसऱ्या देशाला खरेदीच्या किमतीच्या चौपट रकमेला विकली. या उलाढालीसाठी आलेला सात लाख वीस हजार रुपये खर्च वजा जाता कंपनीला चार लाख ऐशी हजार रुपये निव्वळ नफा झाला, तर पहिल्या देशाला विकलेल्या मालाचा उत्पादन खर्च किती होता?

(2) एका नोकराला वार्षिक बारा हजार रुपये रोख व कपडालत्ता देण्याच्या बोलीवर नोकरीला ठेवले. एके वर्षी त्याला अचानक आलेल्या घरच्या आपत्तीमुळे आपल्या गावी जावे लागले. त्या वर्षी त्याची सात महिने नोकरी झाली होती. वर्षाच्या सुरवातीला त्याला कपड्यांचा पूर्ण संच दिला होता. त्यामुळे आता नोकरी सोडून जाताना 6500 रुपये रोख दिले. तर त्याला दर वर्षी देण्यात येणाऱ्या कपड्यांची किंमत किती?

(3) आठवड्याच्या बाजारात दोन मेंढपाळ आपल्या मेंढ्या विकण्यासाठी घेऊन आले. एकाच्या 64, तर दुसऱ्याच्या 20 मेंढ्या होत्या. बाजारात शिरण्यापूर्वी

कर भरावा लागे; पण त्यांच्याजवळ कर भरण्यासाठी पुरेसे पैसे नव्हते. पहिल्या मेंढपाळाने 80 रुपये रोख व 5 मेंढ्या कर म्हणून दिले, तर दुसऱ्याने 2 मेंढ्या करापोटी दिल्या तेव्हा त्याला 80 रुपये परत मिळाले. तर प्रत्येक मेंढीची किंमत किती व मेंढीमागे किती कर भरावा लागला?

(4) एक खेचर व एक गाढव पाठीवर लादलेली ओझी घेऊन रखडत रखडत चालली होती. गाढव एकसारखे कुरकुरत होते, 'केवढं ओझं लादलं आहे माझ्या पाठीवर!'

त्याचे हे कुरकुरणे ऐकून खेचर गाढवाला म्हणाले, "कसली तक्रार करतो आहेस? तुझ्या पाठीवरची एक गोण (पोते) काढून माझ्या पाठीवर टाकली, तर माझं ओझं तुझ्या ओझ्याच्या दुप्पट वजनाचं होईल; पण माझ्या पाठीवरील एक गोण काढून तुझ्या पाठीवर लादली, तर दोघांची ओझी सारख्या वजनाची होतील."

तर प्रत्येकाच्या पाठीवर किती गोण्या लादल्या होत्या?

(5) तीन लहान मित्रांकडे पॉपिन्सच्या सारख्या वड्या होत्या. त्यांच्याबरोबर खेळण्यासाठी त्यांच्या नऊ मित्रमैत्रिणी येऊन दाखल झाल्या. मूळच्या तिघांनी आपल्याकडील सारख्या वड्या त्या मित्रमैत्रिणींना दिल्या तेव्हा त्या बारा जणांच्या वाटणीस सारख्या पॉपिन्स आल्या, तर मूळच्या तिघांकडे प्रत्येकी किती पॉपिन्सच्या वड्या होत्या? व त्यांनी त्या नऊ मित्रमैत्रिणींना प्रत्येकी किती वड्या दिल्या?

(6) एक शिकारी एका जंगलात शिकारीला गेला होता; पण त्या दिवशी त्याला एकही शिकार मिळाली नाही. दिवसभर भटक-भटक करीत तो पार थकून गेला होता. त्याला कडकडून भूक लागली होती. म्हणून तो घरी जाण्यासाठी परत फिरला; पण भुकेने तो इतका व्याकुळ झाला होता की त्याला एक पाऊलही पुढे टाकवेना. कर्मधर्मसंयोगाने त्याला दोन शेतकरी त्याच वाटेने जात असलेले दिसले. त्यांना थांबवून त्याने विनंती केली, 'काही खाण्यासारखं तुमच्याजवळ असल्यास मला द्या. मी भुकेने अगदी व्याकुळ झालो आहे.'

त्या शेतकऱ्यांनाही भूक लागली होती. त्यांनी विचार केला, 'आपणही येथेच खाऊन घ्यावे.' एका शेतकऱ्याजवळ तीन लठ्ठ भाकऱ्या होत्या व दुसऱ्याकडे तशाच पाच भाकऱ्या होत्या. त्या सर्व भाकऱ्या एकत्र करून तिघांनी सारख्या वाटून घेऊन खाल्ल्या. तिघांचे जठराग्नी शांत झाले. मग तिघेही गप्पा मारीत चालू लागले. निघण्यापूर्वी भाकऱ्या खायला दिल्यामुळे दोघांना मिळून शिकाऱ्याने 32 रुपये दिले, तर ते दोघांनी कसे वाटून घ्यावेत?

(7) तीन मित्र सायकलीवरून सहलीला निघालेले होते. संध्याकाळची वेळ

होती. आपण रस्ता चुकलो आहोत, याची कल्पना त्यांना आली. म्हणून रात्र कशी व कोठे काढायची या विवंचनेत ते पडले. इतक्यात थोड्याशा अंतरावर झाडीतून येणारा मिणमिणत्या दिव्याचा प्रकाश त्यांना दिसला. त्यांना हायसे वाटले. ते त्या मिणमिणत्या प्रकाशाच्या दिशेने सायकली घेऊन पायी निघाले. त्यांच्या सुदैवाने ती एक लहानशी खाणावळ होती. तेथे प्रौढ वयाचा एकच माणूस होता. त्याच्याकडे त्यांनी चौकशी केली. रात्रभर निवाऱ्याची सोय व चार घास पोटात घालण्यासाठी मिळतील का, अशी पृच्छा त्यांनी केली.

खाणावळवाला म्हणाला, "रात्रभर आराम करायला जागा आहे. या आडवाटेला कोणीतरी कधीतरी येतो. आता रात्र होत आली आहे. दिवसाची गोष्ट निराळी असते. दिवसाउजेडी आला असतात, तर शेजारच्या गावातून धान्य आणून जेवणाची व्यवस्था करता आली असती. माझ्याकडे थोडेसे बटाटेच काय ते शिल्लक आहेत. तुम्हाला ते चालणार असतील तर उकडून देईन, मीठमिरची त्याबरोबर देईन."

'आलिया भोगासी' असा विचार करून तिघांनी संमती दिली. तिघांनी हातपाय धुऊन (हल्लीच्या भाषेत 'फ्रेश' होऊन) उकडलेले बटाटे केव्हा येतील याची प्रतीक्षा करीत बिछान्यावर अंग टाकले. अतिशय थकल्यामुळे त्या तिघांनाही लगेच गाढ झोप लागली. दरम्यान खाणावळवाल्याने उकडलेले बटाटे एका ताटात आणून त्यांच्या खोलीत ठेवले. तिखटमीठ व मीरपूड (पॅपर याने मिर्च) यांच्या बाटल्याही तेथे ठेवून खाणावळवाला आपल्या खोलीत निघून गेला.

थोड्या वेळाने एका मित्राला जाग आली. उठून पाहतो तो समोर बटाट्यांचे ताट! आपल्या दोघा मित्रांना गाढ झोप लागली आहे असे पाहून त्याने विचार केला, 'दमले असतील बिचारे! त्यांना कशाला उठवा? आपण आपला वाटा खाऊन घेऊ.'

त्याने ताटातील बटाट्यांपैकी एकतृतीयांश बटाटे खाल्ले आणि पाणी पिऊन तो झोपी गेला. आणखी थोड्या वेळाने दुसरा मित्र जागा झाला. त्याला काय माहीत की, आपल्या मित्राने त्याचा वाटा खाऊन फस्त केला आहे! त्यानेही आपल्या मित्रासारखा विचार करून ताटात असलेल्या बटाट्यांपैकी आपला वाटा म्हणून एकतृतीयांश बटाटे खाल्ले व तो निद्राधीन झाला.

थोडा वेळ गेल्यावर तिसऱ्या मित्राला जाग आली. त्याला काय कल्पना की, आपले दोघे मित्र बटाटे खाऊन तृप्त होऊन पुन्हा निद्रादेवीच्या सान्निध्यात गेले आहेत! त्याला समोर ताटात ठेवलेले उकडलेले बटाटे दिसले; पण ते तसे थोडेच होते. त्याला वाटले, 'खाणावळवाला म्हणाला ते खरे असावे. थोडेसेच

बटाटे होते, ते त्याने उकडून आणले व आपण झोपी गेल्यामुळे ते तसेच ठेवून तो गेला असावा.' आपल्या मित्रांप्रमाणेच विचार करून त्यांना जागे न करता ताटात असलेल्या बटाट्यांपैकी एकतृतीयांश बटाटे आपला वाटा म्हणून खाल्ले व बाकीचे तसेच ठेवले. थोड्या वेळात त्यालाही गाढ झोप लागली.

तिघांचे खाणे आटोपले असेल असे समजून खाणावळवाला खोलीत आला. ताटात आठ बटाटे शिल्लक होते. त्याला वाटले, 'बिचारे थकले भागले असल्यामुळे सगळे बटाटे त्यांना संपविता आले नसावेत.' उरलेल्या बटाट्यांचे ताट तो घेऊन गेला.

तर आता सांगा की, खाणावळवाल्याने किती बटाटे शिजवून आणले होते.

12. चार बरोबर पाच?

"4 = 5? अरे मिकी, तुला काय वेड लागलं आहे का? कसं शक्य आहे?" पिंकीचा सवाल.

"मी सिद्ध करून दाखवितो," मिकीचे प्रत्युत्तर.

"कोणी शिकविली तुला सिद्धता?" पिंकीचा आश्चर्योद्गार.

"कोणी कशाला शिकवायला हवे आहे. मीच स्वतः सिद्धता तयार केली आहे. ही बघ."

पिंकीला मिकीने कागद दिला. त्यावर खालील सिद्धता लिहिली होती :

a = b + c असे समजा.

म्हणून 5 = 5b + 5c..... ..... (1)

आणि 4b + 4c = 4a .... (2)

(1) व (2) या समीकरणांची बेरीज करून,

5a + 4b + 4c = 5b + 5c + 4a

दोन्ही बाजूंमधून 9a वजा करून,

4b + 4c - 4a = 5b + 5c - 5a

म्हणजे 4 (b + c - a) = 5 (b + c - a)

दोन्ही बाजूंना (b + c - a) ने भागून, 4 = 5, हे सिद्ध झाले. पिंकीने सगळी सिद्धता वाचली आणि म्हटले, "What a great achievement! you silly mathematician!"

पिंकीने मिकीला, 'silly mathematician' म्हणण्याचे धारिष्ट्य कसे काय केले? सांगाल का?

13. एक नाजूक बाब

माणसाच्या जीवनात वय ही एक अत्यंत 'नाजूक बाब' आहे, असे म्हणायला हरकत नाही. पन्नास-साठ वर्षांपूर्वी माणसाचे सरासरी आयुर्मान फारच कमी होते. 'साठी बुद्धी नाठी' या म्हणीनुसारच बहुधा चाकरमान्यांचे निवृत्तीचे वय 55 ते 60 च्या आसपास ठरविले गेले असावे; पण वैज्ञानिक प्रगतीबरोबरच वैद्यकीय शास्त्रातही नव्या नव्या औषधांचे (की रोगांचे?) शोध लागले. परिणामी, पूर्वी असाध्य वाटणारे रोग पुष्कळ प्रमाणात आटोक्यात आले आहेत. त्यामुळे माणसाचे सरासरी आयुर्मान वाढलेले आहे. या दृष्टीने वय ही एक नाजूक बाब आहे, असे म्हटले तर वावगे होणार नाही.

स्त्रियांच्या बाबतीत 'वय' ही त्यांच्याएवढीच, किंबहुना कांकणभर अधिकच नाजूक बाब असते. वय लपविण्यासाठी निरनिराळ्या प्रकारची वंगणे (cosmetics साठी आम्ही वापरलेला शब्द), त्यांच्या खोट्यानाट्या जाहिराती वाचून व दूरदर्शनवर पाहून अचंबा वाटतो. या वंगणांच्या बाटल्यांची बुडे अर्ध्या अधिक उंचीपर्यंत खालून पोकळ असतात. 'पोकळ' माल भरण्यासाठी अशी पोकळी आवश्यकच नाही का?

नट्यांची गोष्ट तर आणखीनच बहारीची असते. त्यांचे वय 15 ते 20 च्या दरम्यानच राहावे, अशी त्यांची स्वतःचीच नव्हे, तर सिनेशौकिनांचीही इच्छा असल्याचे दिसून येते.

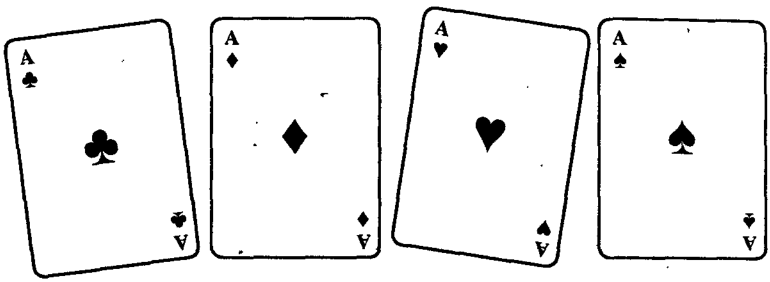
ही सर्व प्रस्तावना कशासाठी? याचा गणिताशी काय संबंध? आपणास असे वाटल्यास नवल नाही; पण काही विक्षिप्त पुरुषांनाही या 'वयाच्या नाजूकपणाच्या रोगाची' बाधा होत असल्याचे आमच्या निदर्शनास आले आहे. शेजारच्या बाबूरावांचीच गोष्ट घ्या ना. 1990 साली त्यांना कोणीतरी त्यांचे वय विचारले. बाबूराव हे स्वतःला 'गणिती' समजतात. त्यांनी दिलेले विचित्र उत्तर ऐका.

"माझ्या दोन मुलांची वये 10 ते 20 च्या दरम्यान आहेत. एका मुलाच्या वयाला त्याच्याच वयाने दोनदा गुणले (म्हणजे त्याच्या वयाचा घन केला) व दुसऱ्या मुलाच्या वयाला त्याच्याच वयाने गुणले (म्हणजे त्याच्या वयाचा वर्ग

केला) आणि आलेल्या गुणाकारांची बेरीज केली; तर माझ्या पत्नीचे जन्मसाल मिळते. मी माझ्या पत्नीपेक्षा पाच वर्षांनी मोठा आहे.''

आहे ना विचित्र उत्तर? आमची मती तर कुंठित झाली आहे त्यांच्या उत्तराने! हा वयांचा गुंता सोडवून त्या कुटुंबातील् चौघांची वये आम्हाला सांगाल का? हात जोडून, पाय धरून (आमचे नव्हे, तुमचे) कळकळीची विनंती करीत आहो.

14. चार एक्के



गणित! गणित!! गणित!!! कंटाळा आला असेल तेच तेच एकसारखे गणित गणित वाचून, नाही का? तर मग थोडी दुसऱ्या प्रकारची करमणूक करून घेऊ. पत्ते घेऊ आणि चारही एक्के एकापाठोपाठ काढून दाखविण्याची पत्त्यांची एक जादू करू.

प्रेक्षकांपैकी एकाला 10 आणि 20 यांच्या दरम्यानची एक संख्या विचारावी. पत्त्यांचा जोड (pack) घेऊन प्रेक्षकाने सांगितलेल्या संख्येएवढे पत्ते मोजून घ्यावेत. असे करताना जोडातील अगदी वरचे पान खाली राहील व शेवटचे पान (पत्ता) वर राहील.

समजा, प्रेक्षकाने 14 ही संख्या सांगितली. पत्त्यांच्या जोडातील एकेक पान काढून टेबलावर एकावर एक ठेवा. अशा तऱ्हेने चौदावे पान अगदी वर येईल. आता चौदा पानांचा एक व राहिलेल्या पानांचा दुसरा असे पत्त्यांचे दोन ढीग झाले. 14 या संख्येतील अंकांची बेरीज 5 येते. तेवढी पाने लहान ढिगातून वरपासून काढून घेऊन ती मोठ्या ढिगावर ठेवा. सहावे पान टेबलाच्या पुढच्या कोपऱ्यात उपडे ठेवा व लहान ढिगातील राहिलेली पाने मोठ्या ढिगाच्या वर ठेवा.

दुसऱ्या एका प्रेक्षकाला 10 ते 20 यांच्या दरम्यानची कोणतीही एक संख्या विचारा. त्याने 18 ही संख्या सांगितली, असे समजा. मोठ्या ढिगातून वरपासून एकेक असे 18 पत्ते काढून त्यांचा दुसरा एक लहान ढीग बनवा. 18

संख्येतील अंकांची बेरीज 9 आहे. म्हणून 9 पत्ते या दुसऱ्या लहान ढिगातून काढून मोठ्या ढिगावर ठेवा. दहावा पत्ता टेबलावरील समोरच्या बाजूला ठेवलेल्या पत्त्याजवळ ठेवा व त्या लहान ढिगातील उरलेले पत्ते पुन्हा मोठ्या ढिगावर ठेवा.

यःप्रमाणे आणखी दोन प्रेक्षकांना क्रमाने 10 ते 20 च्या दरम्यानच्या संख्या विचाराव्यात आणि वर सांगितल्याप्रमाणे क्रिया कराव्यात. म्हणजे टेबलावर समोरच्या बाजूला चार पत्ते राहतील. ते पत्ते दुसऱ्या एखाद्या प्रेक्षकाला उताणे करून प्रेक्षकांना दाखवावयास सांगावे. ते चार एक्के असलेले पाहून प्रेक्षकांना आश्चर्य वाटेल. तेव्हा प्रेक्षकांना म्हणावे, "तुम्ही सांगितलेल्या संख्या, पण माझी करामत!"

ही जादू करून दाखविताना अर्थातच **थोडीशी** लबाडी करावी लागते. जादू म्हटली की हातचलाखी किंवा दुसऱ्या एखाद्या प्रकारची प्रेक्षकांना न कळेल अशी काही तरी करामत करून ठेवावी लागते. येथे कोणती हातचलाखी आहे? तशी हातचलाखी नाही, पण एक करामत जरूर आहे. चार एक्के पत्त्यांच्या जोडात वरपासून 9, 10, 11 व 12 या क्रमांकांवर ठेवावेत व ते पत्ते न पिसता वर सांगितल्याप्रमाणे चार प्रेक्षकांना संख्या विचारून सांगितलेली जादू करावी. स्वतः करून अनुभव घ्या, म्हणजे खात्री पटेल.

हा अनुभव घेतल्यावर ह्या जादूचा व गणिताचा काय संबंध असा प्रश्न उभा राहील. तोच प्रश्न आम्ही तुम्हाला करीत आहोत.

प्रेक्षकांनी सांगितलेल्या संख्यांएवढे पत्ते काढून घेऊन बाजूला एकेक असे काढलेले चार पत्ते एक्केच का निघतात?

15. सुसम पंचकोनाकृती

(कागदाचे घडीकाम)

कागदाला घड्या घालून व थोडेसे जरूर लागल्यास कातकाम (कापणे) करून निरनिराळे सुबक आकार बनविणे ही एक कला आहे. किंडरगार्टन किंवा शिशुविहारमधील मुलांना होड्या, कप, टोप्या, हॅट इत्यादी आकार कागदाला घड्या घालून करायला शिकवितात. याचा अर्थ ती क्षुल्लक बाब असे वाटणे चुकीचे आहे. चीन-जपानसारख्या देशांत ही कला फारच प्रगतावस्थेला पोचलेली आहे.

परंपरागत चालत आलेल्या या कलेमध्ये कागदाला केवळ घड्या घालून पशुपक्षी, मासे इत्यादींच्या प्रतिकृती बनविण्यात ते लोक तरबेज असत. कागद कापणे किंवा गोंदाने (गम) चिकटविणे या गोष्टी वर्ज्य असत. आधुनिक काळात या कलेसाठी त्या बाबी काटेकोरपणे त्याज्य असे समजत नाहीत. थोडेसे कापणे, चिकटविणे हल्ली मान्य आहे.

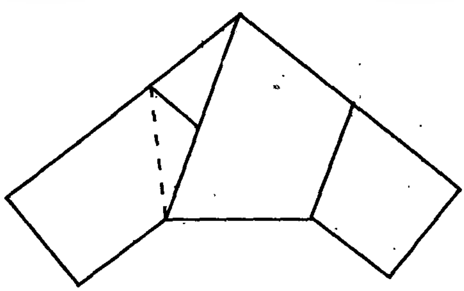
नेहमीच्या हाताशी असलेल्या कागदाच्या तुकड्यांतून कलात्मक वस्तू, नक्षीकाम, सजावटीसाठी सुंदर आकर्षक आकार तयार करणे हा एक आनंदभरा अनुभव असतो.

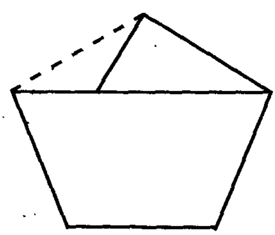
हल्ली शालेय अभ्यासक्रमात भूमितीच्या अभ्यासात कागदघडीला (पेपर फोल्डिंगला) विशेष महत्त्व प्राप्त झाले आहे. काटकोनाची कल्पना कागदाला केवळ दोन घड्या घालून किती सहजतेने ठसविता येते! समद्विभुज त्रिकोण, चौरस, सुसम षट्कोन, अष्टकोन यांसारख्या भौमितिक आकृत्या कागदघडी तंत्राने तयार करणे फारच सुलभ असते. नुसत्या त्या आकृत्या बनविणे हा या तंत्राचा उद्देश नसून, त्या आकृत्यांचे गुणधर्म कागदाला घातलेल्या घड्या स्पष्ट दिसत असल्यामुळे प्रस्थापित करता येतात. त्यामुळे गणिताच्या अभ्यासात येणारा तोचतोचपणा (monotony) नाहीसा होऊन गुणधर्म समजणे सोपे होते. सममितीच्या (symmetry) गुणधर्मांमुळे निरनिराळ्या भौमितिक प्रमेयांचे आकलन सहजसुलभ

होते.

भौमितिक आकृत्यांच्या रचना करताना कंपासपेटीतील फक्त दोनच उपकरणे– सरळपट्टी (straight edge, कोणत्याही परिमाणाच्या खुणा नसलेली पट्टी) व कंपास यांचाच केवळ वापर करण्याचा दंडक युक्लिडने घातला. तो दोन हजारांहून अधिक वर्षे झाली तरी पाळला जात आहे. केवळ या दोन उपकरणांचा उपयोग करून समभुज त्रिकोण, चौरस, सुसम षट्कोन, अष्टकोन इत्यादी सुसम आकृत्या सहज काढता येतात; पण केवळ या दोन साधनांचा उपयोग करून **सुसम पंचकोन** काढणे सोपे नाही; पण कागदघडी तंत्राने सुसम पंचकोन तयार करणे किती क्षुल्लक बाब आहे, त्यांचा स्वतः अनुभव घेऊन या कलेतील आनंद लुटा.

अडीच-तीन सेंटिमीटर रुंदीची व वीस-पंचवीस सेंटिमीटर लांबीची एक कागदाची पट्टी घ्या व तिची एक साधी गाठ मारा. ती गाठ घट्ट करा. मात्र असे करताना कागद दुमडला जाणार नाही (म्हणजे पट्टीची रुंदी कायम राहील) याची काळजी घ्या. ती गाठ चापून चोपून चांगली सपाट करा. गाठ घट्ट बसलेली आहे याची खात्री करून घ्या. डाव्या बाजूच्या आकृतीत तुटक रेषा दाखविल्या आहेत, त्या रेषांवर बाहेर राहिलेली पट्टी कापून टाका. उजव्या बाजूच्या आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे सुसम पंचकोन तयार होईल.

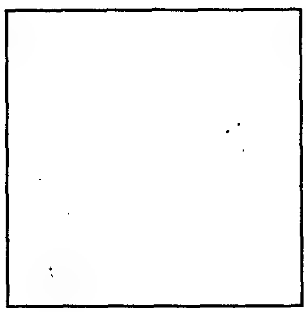




अशी सुसम पंचकोनाकृती तयार करण्यात आणखी एक गंमत आहे. तुटक रेषांवर कापण्याऐवजी दोन्ही बाजूच्या पट्ट्यांचे भाग तुटक रेषांवर दुमडा. तयार झालेली आकृती प्रकाशात धरा. पाच टोकांच्या ताऱ्याचे मनमोहक चित्र प्रकाशात दिसेल. (कागद पातळ व पारदर्शक असेल तर हे दृश्य स्पष्टपणे दिसेल.)

16. चौरसातून चौरस

सोबतच्या चौरसात काही बदल करून पाच लहान चौरस असे तयार की, त्यांचे एकूण क्षेत्रफळ त्या चौरसाच्या क्षेत्रफळाबरोबर होईल.



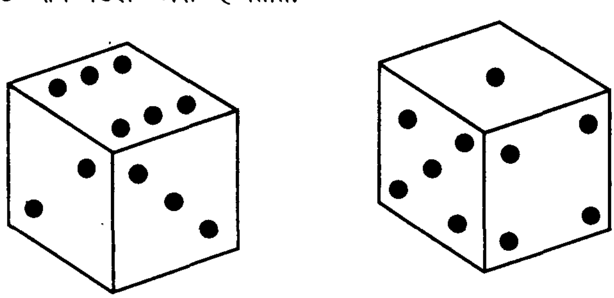
17. नशिबाचा खेळ

विलासराव व धनराज दोघे जीवश्च कंठश्च मित्र. दोघांच्याही घरी आजोबांपासून गडगंज संपत्ती. विदर्भातील दहा-वीस शाळांच्या इमारतींचे बांधकाम या दोघा आजोबांनी दिलेल्या देणग्यांवरच झाल्याचे ऐकिवात आहे. विदर्भातील लोक तसे खानदानी, दानशूर, विलासी, ऐषारामी असा बोलबाला असल्याचे आम्ही आमच्या आजोबांच्या तोंडून ऐकले आहे.

आपले नाव यथार्थ असल्याचे सिद्ध करण्यासाठी विलासराव नागपूरच्या एका कॉलेजात (तेव्हा ज्युनिअर कॉलेजे नव्हती) पहिल्या वर्षाच्या वर्गात लागोपाठ तीन वर्षे होते. त्यानंतर त्यांचे आई-वडील घराचा सर्व कारभार एकुलत्या एका मुलावर सोपवून थोड्याच दिवसांच्या फरकाने परधामास गेले. धनराज हे दहावीचा उंबरठा ओलांडू शकले नाहीत. त्यांचे आई-वडील तीर्थयात्रेला गेले, ते परतलेच नाहीत.

अशा परिस्थितीत दोघाही मित्रांना रान मोकळे झालेले होते. रात्रंदिवस तहानभूक विसरून दोघेही जुगार खेळण्यात मशगुल असत.

घनाकृती फासे तुम्ही पाहिले असतील. प्रत्येक फाशाला सहा पृष्ठभाग असतात. त्या पृष्ठभागांवर एक, दोन, तीन, चार, पाच व सहा असे ठिपके असतात. दोन फासे टाकून वरच्या भागांवर जेवढे ठिपके असतील त्यांच्या बेरजेएवढे 'दान पडले' असे म्हणतात.



विलासराव व धनराज घनाकृती फाशांचा एक खेळ खेळत असत. एकाने 2 ते 12 यांपैकी एक संख्या सांगायची व दुसऱ्याने दोन्ही फासे टाकायचे. दोन्ही फाशांत मिळून पडलेले दान पहिल्याने सांगितलेल्या संख्येएवढे पडले, तर पहिला जिंकला व त्या संख्येएवढे दान पडले नाही, तर दुसरा (फासे टाकणारा) जिंकला. आळीपाळीने एकाने संख्या सांगायची व दुसऱ्याने फासे टाकायचे, असा होता त्यांचा खेळ!

कौरव-पांडव द्यूत खेळले, तेव्हा शकुनी मामा सांगेल ते दान कौरवांच्या बाजूने पडत गेले. त्यामुळे पांडव हरले. तशा सारखाच पण थोडा बदल केलेला हा एक द्युताचाच खेळ होता.

कोणती संख्या सांगितली तर आपण जिंकू? अर्थातच, **जे दान पडण्याची शक्यता** सर्वांत जास्त, तेवढी संख्या सांगणे, म्हणजे यशाची खात्री! येथे 'शक्यता' हा शब्द वापरला आहे, त्याचा अर्थ काय?

2 पासून 12 पर्यंतची दाने पडण्याच्या शक्यता निरनिराळ्या असतात की काय? होय! वरील वाक्यातील 'शक्यता' या शब्दाचा ध्वनितार्थ तोच आहे.

दोन फाशांवरील ठिपके एखादे दान किती प्रकारांनी देऊ शकतात, त्या प्रकारांची संख्या निरनिराळ्या दानांच्या बाबतीत निरनिराळी का असते हे विचारात घेऊ.

दोन्ही फाशांवर प्रत्येकी एक ठिपका वर आला तरच 2 हे दान होईल. आणखी अन्य प्रकारे **2 हे दान** पडणार नाही. म्हणजे 2 हे दान फक्त एकाच प्रकारे पडेल.

(1) पहिल्या फाशावर 1 व दुसऱ्या फाशावर 2, किंवा (2) पहिल्या फाशावर 2 व दुसऱ्या फाशावर 1, असे ठिपके वर आले, तर 3 हे दान मिळेल. म्हणजे 3 हे दान **दोन प्रकारांनी** मिळण्याची **शक्यता** असते. 2 पासून 12 पर्यंतची निरनिराळी दाने पडण्याच्या किती किती शक्यता असतात, हे खालील तक्त्यात दाखविले आहे.

दान	निरनिराळे प्रकार	एकूण प्रकार	दान	निरनिराळे प्रकार	एकूण प्रकार
2	1, 1	1		2, 6	
3	1, 2	2		3, 5	
	2, 1		8	4, 4	5
	1, 3			3, 5	
4	2, 2	3		2, 6	
	3, 1			3, 6	
	1, 4			4, 5	
5	2, 3	4	9	5, 4	4
	3, 2			6, 3	
	4, 1			4, 6	
	1, 5		10	5, 5	3
	2, 4			6, 4	
6	3, 3	5			
	4, 2		11	5, 6	2
	5, 1			6, 5	
	1, 6				
	2, 5		12	6, 6	1
7	3, 4	6			
	4, 3			एकूण सगळे प्रकार	36
	5, 2				
	6, 1				

म्हणजे निरनिराळी दाने पडण्याचे एकूण 36 प्रकार संभवतात. त्यांपैकी कोणते दान पडण्याचे प्रकार सर्वांत जास्त आहेत? 7 हे दान 36 प्रकारांपैकी सर्वांत जास्त म्हणजे 6 प्रकारांनी पडण्याची शक्यता असते.

गणिती भाषेत आपणास अनुकूल (favourable) असणाऱ्या शक्यता प्रकारांचे एकूण शक्यता प्रकारांशी जे गुणोत्तर असते त्याला अनुकूल शक्यतांची (favourable chances ची) संभाव्यता (probability) म्हणतात. 7 हे दान पडण्याची **गणिती** संभाव्यता (mathematial probability) 36 पैकी 6, म्हणजेच 6 पैकी 1,

म्हणजेच 1/6 आहे.

यांचा अर्थ असा नव्हे की, 36 वेळा फासे टाकले तर त्यांपैकी 6 वेळा 7 हे दान पडेल. 1/6 ही गणिती संभाव्यता असे सांगते की, **असंख्य** प्रयत्न केले तर 7 हे दान पडण्याच्या वेळांचे असंख्य प्रयत्नांच्या वेळांशी गुणोत्तर 1:6 शी अगदी जवळ असेल.

गणिती संभाव्यता म्हणजे निश्चिती नव्हे. **नशीब जोरावर असेल,** तर 7 हे दान 36 वेळांपैकी 6 पेक्षा जास्त वेळाही पडेल. **नशिबाने अगदीच पाठ फिरविली,** तर 36 वेळांमध्ये एकाही वेळेस 7 हे दान न पडण्याचे नाकारता येत नाही.

आता, दोन ऐवजी तीन घन फासे टाकले, तर काय होईल याचा विचार करा. खालील प्रश्नांची उत्तरे शोधून काढण्याचा प्रयत्न करा.

1) एकच फासा टाकला, तर निरनिराळी सहा दाने पडू शकतात व प्रत्येक दान पडण्याची गणिती संभाव्यता 1:6 असते. दोन फासे टाकले, तर किती प्रकारची दाने पडतात? (मागील तक्ता पाहून उत्तर द्या.)
2) तीन फासे घेतले तर ते टाकल्यावर किती प्रकारची दाने पडू शकतील? (कमीत कमी किती दान पडेल, तसेच जास्तीत जास्त किती दान पडेल, याचा विचार करून उत्तर काढा).
3) ही दाने पडण्याचे निरनिराळे एकूण किती प्रकार संभवतात?
4) खाली दिलेला तक्ता पुरा करा. प्रत्येक दान पडण्याचे निरनिराळे प्रकार लिहिताना पद्धतशीर रीतीने (systematic way) गेल्यास चूक होणार नाही. प्रथम पहिल्या फाशावरील दान 1 हे कायम ठेवून दुसऱ्या फाशावरील दान 1 पासून 6 पर्यंत जेथे शक्य असेल तेथे बदलत जाऊन तिसऱ्या फाशावरील दान निश्चित करावे. याप्रमाणे प्रयत्न केल्यास दान पडण्याचे सर्व प्रकार लिहिता येतील. तो तक्ता पुरा झाल्यावर कोणतेही एक अगर अधिक दाने जास्तीत जास्त प्रकारांनी पडण्याची व किती प्रकारांनी पडण्याची शक्यता आहे ते ठरवा.
5) जास्तीत जास्त प्रकारांनी पडणाऱ्या दानांची गणिती संभाव्यता किती?

दान	दान पडण्याचे निरनिराळे प्रकार	एकूण प्रकार
3	(1 1 1)	1
4	(1 1 2), (1 2 1), (2 1 1)	3

5	(1 1 3), (1 2 2), (1 3 1) (2 1 2), (2 2 1), (3 1 1)	6
6	(1 1 4), (1 2 3), (1 3 2) (1 4 1), (2 1 3), (2 2 2) (2 3 1), (3 1 2), (3 2 1) (4 1 1)	10
7	--- --- --- --- ---	-----

18. सिद्धता म्हणजे काय?

संदीप व दिलीप हे दोघे मित्र अगदी गणितवेडे आहेत. दोघांपैकी कोण जास्त हुशार आहे, हे सांगणे कठीण आहे; पण दिलीप हा संदीपला आपल्या मोठ्या भावासारखा मानतो. संदीपला अर्थातच या गोष्टीचा, नाही म्हटले तरी, थोडाफार अभिमान वाटतो.

त्या दिवशी संदीप व दिलीप यांची भेट झाली तेव्हा दिलीप अगदी खुशीत होता. तो संदीपला म्हणाला, "आज आम्हाला शाळेत पायथॅगोरसचा सिद्धान्त शिकविला. तू पायथॅगोरसच्या नावाचा मला बाऊ दाखवीत असतोस; पण आता मला त्या बाबतीत काहीसुद्धा आश्चर्य किंवा आदर वाटत नाही. आमच्या शिक्षकांनी सांगितलं की, पायथॅगोरसने जो सिद्धान्त मांडला, तो आपल्या भारतात, पायथॅगोरस होण्यापूर्वी कितीतरी शतके आधी भारतीय गणितज्ञांना माहीत होता."

"तुमच्या शिक्षकांनी जे सांगितलं ते खरं आहे. बरं, पण आज तुम्ही पायथॅगोरसचा सिद्धान्त शिकलात म्हणजे नक्की काय केलंत?"

"काटकोन त्रिकोणाच्या कर्णावरील चौरसाचं क्षेत्रफळ त्या त्रिकोणाच्या काटकोन करणाऱ्या दोन बाजूंवरील चौरसांच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेएवढं असतं, हा सिद्धान्त प्रत्यक्ष प्रयोग करून शिकलो."

"पण हा सिंद्धान्त सर्व काटकोन त्रिकोणांच्या बाबतीत खरा असतो, हे कशावरून?"

"का? आमच्या वर्गातील प्रत्येकानं ग्राफ पेपरवर बाजूंची मापं निरनिराळी घेऊन काटकोन त्रिकोण काढले. नंतर त्या बाजूंवर चौरस काढले. त्या चौरसांची क्षेत्रफळं मोजली. दोन लहान बाजूंवरील चौरसांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज मोठ्या बाजूवरील म्हणजे कर्णावरील चौरसाच्या क्षेत्रफळाएवढी आली."

"हे ठीक झालं. बाजूंची मापं तुम्ही तुमच्या सोयीप्रमाणे साधारणपणे पूर्णांकांतच घेतली होती, खरं ना? काहींनी अपूर्णांकांतही घेतली असतील. अपरिमेय मापे कोणी घेतली नसणारच, कारण अपरिमेय हा शब्दच तुमच्यापैकी कित्येकांना माहीत नाही. ते जाऊ दे; पण मला सांग की एखाद्या तिऱ्हाईत माणसाने

काढलेल्या काटकोन त्रिकोणाच्या बाबतीत हा सिद्धान्त खरा असला पाहिजे, असं छातीठोकपणे तू म्हणशील का?''

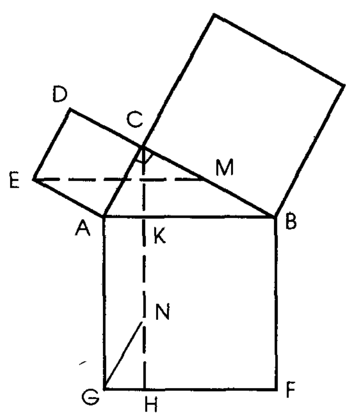
''क्षेत्रफळं मोजून बघावी लागतील!''

''जगातल्या प्रत्येकानं एकेक काटकोन त्रिकोण काढला, तर त्या प्रत्येक काटकोन त्रिकोणाच्या बाबतीत क्षेत्रफळ मोजण्याचं काम तू करू शकशील का?''

''नाही.''

''जर हे शक्य नाही, तर **कोणत्याही** काटकोन त्रिकोणाच्या बाबतीत तुम्ही आज शिकलेला सिद्धान्त खरा आहे, असं म्हणता येणार नाही. त्यासाठी **'सिद्धता'** आवश्यक असते. म्हणजे कोणताही काटकोन त्रिकोण घेऊन तर्कसंगत युक्तिवाद करून तो सिद्धान्त कोणत्याही काटकोन त्रिकोणाला लागू पडतो, अशा प्रकारच्या युक्तिवादालाच त्या सिद्धान्ताची 'सिद्धता देणे' असे म्हणतात. अशी सिद्धता देता आली तरच त्या सिद्धान्ताला मान्यता प्राप्त होते. ही सिद्धता कशी देतात याचा नमुना तुला दाखवितो.

''ABC या त्रिकोणाचा $\angle C$ हा काटकोन आहे व त्या त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजूंवर चौरस काढले आहेत.



''सिद्धतेच्या सोयीसाठी या मूळ आकृतीत बदल न करता काही जास्त रेषाखंड काढू या. अशा प्रकाराला 'रचना' (construction) असे नाव देतात. C या बिंदूतून Δ ABC च्या कर्णावर लंबरेषाखंड काढू व तो कर्णावरील चौरसाच्या बाजू AB च्या समोरच्या बाजूला H बिंदूत मिळवू. मग कर्णावरील

चौरसाचे दोन आयत तयार होतील. त्यांपैकी डावीकडील आयताचे क्षेत्रफळ बाजू AC वरील चौरसाच्या क्षेत्रफळाएवढे आहे, असे म्हणता येते.''

''खरं की काय? आश्चर्यच आहे!''

''त्यात आश्चर्य वाटण्यासारखं काही नाही. E बिंदूमधून बाजू AB ला समांतर काढलेली रेषा बाजू DC ला (जरूर तर वाढविलेल्या DC ला) M मध्ये मिळवू. आता Δ EMD व Δ ABC एकरूप दाखविता येतील का?''

''हो. बाजू ED एकरूप बाजू AC, ∠ D व ∠ C हे काटकोन म्हणून एकरूप व ∠ EMD व ∠ ABC हे संगत कोन एकरूप असल्यामुळे को-को-बा एकरूपता कसोटीनुसार ते त्रिकोण एकरूप आहेत.''

''शाब्बास! येथपर्यंत समजलं ना? हे **कोणत्याही** काटकोन त्रिकोणाच्या बाबतीत खरं आहे ना?''

''हो, अगदी शंभर टक्के.''

''आता, समलंब चौकोन EABD मधून एकदा Δ EMD व दुसऱ्या वेळी Δ ABC काढून टाकले की चौरस AEDC चे क्षेत्रफळ समांतरभुज चौकोन EMBA च्या क्षेत्रफळाबरोबर होईल.''

''येथपर्यंत पटलं; पण पुढे काय?''

''आता, G बिंदूमधून बाजू AC ला समांतर काढलेली रेषा, लंब CH ला N बिंदूत मिळवू. मग समांतरभुज चौकोन AGNC व आयत AGHK यांची क्षेत्रफळे समान होतात. कशावरून?''

''ते दोन्ही समांतरभुज चौकोन आहेत. रेख AG हा त्यांचा सामाईक पाया आहे व त्यांचे राहिलेले शिरोबिंदू पायाला समांतर असलेल्या रेषेवर आहेत. म्हणून ते समक्षेत्र आहेत.''

''वारे पठ्ठे! कमाल केलीस! आता समांतरभुज चौकोन EMBA व AGNC समक्षेत्र आहेत, असे दाखविले की आपले काम फत्ते! कसे ते येते का ध्यानात?''

''थोडा विचार करून सांगतो. समांतरभुज चौकोन EMBA च्या संलग्न बाजू रेख EM व रेख EA या समांतरभुज चौकोन AGNC च्या अनुक्रमे बाजू AG व AC यांच्याशी एकरूप आहेत व ∠ MBA व ∠ ACN हे दोन्ही ∠ CAB चे कोटिकोन असल्यामुळे एकरूप आहेत. त्यामुळे समांतरभुज चौकोन EMBA व AGNC एकरूप आहेत. परिणामी ते समक्षेत्र आहेत.''

''छान, छान! 'सिद्धता' कशी असते व ती देण्यासाठी कसा विचार करावा लागतो, याची थोडीफार ओळख झाली असेल तुला? या दोन समांतरभुज चौकोनांशी अनुक्रमे समक्षेत्र असलेले चौरस AEDC व आयत AGHK हे

समक्षेत्र आहेत, असं सिद्ध झालं की नाही? विशिष्ट त्रिकोणाच्या बाबतीत नव्हे, तर **कोणत्याही** काटकोन त्रिकोणाबाबत वर आलेल्या सर्व बाबी खऱ्या आहेत, हे लक्षात घे. याच रीतीने बाजू BC वरील चौरस व आयत BFHK यांची क्षेत्रफळे समान आहेत, असे सिद्ध करता येईल.

" 'मोजूनमापून सत्यता पटविणे' व 'सिद्धता देणे' यांमधील फरक आला ना ध्यानात? पायथॅगोरसच्या सिद्धान्ताच्या अशा अनेक सिद्धता देता येतात. निदान चार-पाच सिद्धतांचं संकलन करण्याचा प्रयत्न कर."

* * * * *

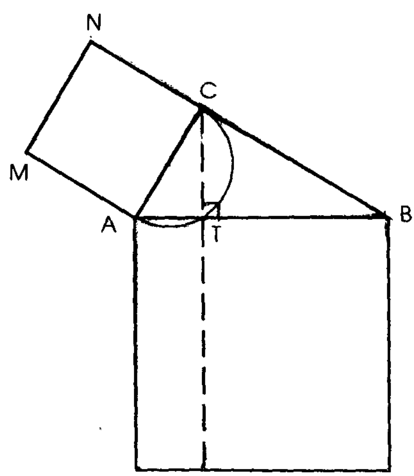
दोन दिवसांनी दिलीप लांबट चेहरा करून संदीपकडे आला व म्हणाला, "मी माझ्या वर्गबंधूंना सांगितलं की, दिलेल्या चौरसाचं क्षेत्रफळ असलेला आयत काढण्याची मी एक युक्ती शोधून काढली आहे."

संदीप आश्चर्याने थक्कच झाला. "कोणती युक्ती बाबा?"

"तू दोन दिवसांपूर्वी पायथॅगोरसच्या सिद्धान्ताची सिद्धता मला समजावून दिलीस ना, तिचं मनन करीत असताना ही रचना मला सुचली."

"कशी रचना केलीस?"

"AMNC हा दिलेला चौरस आहे. त्याची AC ही बाजू व्यास असणारे अर्धवर्तुळ त्या चौरसाच्या समोरच्या अंगाला काढले. त्या अर्धवर्तुळावर T हा एक बिंदू स्थापला. AT जोडून पुढे वाढविली व ती वाढविलेल्या NC ला जेथे मिळाली त्या बिंदूला B हे नाव दिले. Δ ABC च्या बाजू AB वर चौरस काढला. CT हा AB वरील लंब वाढवून त्या चौरसाचे दोन भाग – दोन आयत केले.



डावीकडील आयताचे क्षेत्रफळ बाजू AC वरील चौरसाच्या क्षेत्रफळाएवढे आहे. तसेच उजव्या बाजूच्या आयताचे क्षेत्रफळ बाजू CB वरील चौरसाच्या क्षेत्रफळाएवढे असेल.''

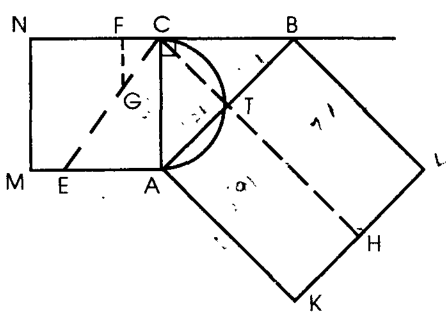
''छान! यात कोठेच चूक नाही. मग तू असा लांबट चेहरा का केला आहेस?''

''माझ्या वर्गमित्रांना हे पटत नाही. चौरसाचे तुकडे करून ते त्या आयतात कसे बसतात हे त्यांना दाखविलं, तर ते पटेल का रे त्यांना? या बाबतीत मला तुझी मदत हवी आहे.''

''ठीक आहे. आपण विचार करू.''

संदीपने या प्रश्नावर खूप विचार केला; पण चौरसाचे कमीत कमी किती तुकडे करायचे व ते कसकसे करायचे याचा उलगडा होईना. म्हणून त्या प्रश्नाचा विचार काही दिवस करायचा नाही असे त्याने ठरविले; पण त्याचे अंतर्मन स्वस्थ बसलेले नव्हते. आणखी चार दिवसांनी तो असाच स्वस्थ पडून राहिला असता एक कल्पना मनात डोकावली. लगेच तो उठला व त्या कल्पनेप्रमाणे चौरसाची कापाकापी करून ते तुकडे आयतात बरोबर बसतात की नाही हे ताडून पाहिले. लगेच तो धावत दिलीपकडे गेला व त्याच्या योजनेप्रमाणे चौरस व आयत दिलीपकडून काढून घेऊन पुन्हा खात्री करून घेतली. दोघांना केवढा आनंद झाला होता!

संदीपची रीत खालीलप्रमाणे होती.



ACNM या चौरसाचे क्षेत्रफळ, AE एवढी एक बाजू असलेल्या ATHK या आयताच्या क्षेत्रफळाएवढे आहे, असे दाखवायचे आहे.

त्यासाठी CN या बाजूवर F हा बिंदू असा स्थापा की CF = ME. EC हा

रेषाखंड काढा. F बिंदूतून CA ला समांतर काढलेला रेषाखंड रेख EC ला G मध्ये मिळू द्या.

मग चौरस ACNM हा रेख EC व रेख FG वर कापून त्याचे तीन तुकडे करा. हे तीन तुकडे आयत ATHK मध्ये बरोबर बसतील.

आपण स्वतः ही रचना करून कापाकापी-जोडाजोडी करून प्रत्यक्ष अनुभव घ्या.

19. पत्त्यांचा एक मजेशीर खेळ

तेरा पानी लॅडीस, गुलामचोर, 304 मार्कांचा डाव, गड्डा झब्बू, नाठ्याठोम (म्हणजे 'नॉट ॲट होम'), बदाम सत्ती इत्यादी निरनिराळे पत्त्यांचे खेळ तुम्ही खेळत असाल. ब्रिज, बिझीक, कॅनास्टा, व्हिस्ट ड्राईव्ह इत्यादी खेळही कित्येकांना माहीत असतील. या खेळांच्या स्पर्धांमध्ये कित्येकांनी भागही घेतला असेल. आज पत्त्यांच्या एका मजेशीर खेळाची आपण ओळख करून घेऊ या.

हा खेळ तीन किंवा अधिक लोकांना खेळता येईल. या खेळाचे वैशिष्ट्य म्हणजे ब्रिज, रमी इत्यादी खेळांमध्ये जसे ठरविलेले नियम असतात, तसे या खेळात नाहीत. उलटपक्षी, प्रत्येक डावात कोणता नियम असेल त्याचा अंदाज बांधून हा खेळ खेळायचा आहे. एक अंदाज चुकला तर आपली खेळण्याची पाळी येईल तेव्हा दुसरा अंदाज बांधून खेळायचे. असा नवा अंदाज बांधताना इतरांचे अंदाज कसे चुकले याकडे लक्ष ठेवायचे.

एक व्यक्ती **नेता** म्हणून पत्ते वाटण्याचे काम करतो. नेता म्हणून तो डावाचा नियम **स्वत:शी** ठरवितो, पण तो नियम इतरांना सांगत नाही. नंतर वादावादी होऊ नये म्हणून ठरविलेला नियम एका कागदावर लिहून ठेवतो. नंतर तो स्वतःखेरीज इतरांना पत्ते वाटतो. पत्ते वाटण्यापूर्वी एक पत्ता कोणालाही न दाखविता बाजूला काढून ठेवतो. राहिलेले 51 पत्ते वाटताना सर्वांना सारखे पत्ते वाटून खेळाडूंपेक्षा कमी पत्ते शेवटी उरले, तर तेही बाजूला ठेवतो.

समजा, नेत्याने खालील नियम इतरांना न दाखविता लिहून ठेवला : तांबड्या रंगाच्या पत्त्यावर काळ्या रंगाचा पत्ता टाकला पाहिजे व काळ्या रंगाच्या पत्त्यावर तांबड्या रंगाचा पत्ता टाकला पाहिजे.

पत्ते वाटून झाल्यावर खेळाला सुरुवात करण्यासाठी अगदी प्रथम जो एक पत्ता नेत्याने बाजूला काढून ठेवला होता तो उताणा करून मधोमध ठेवतो. नेत्याच्या उजव्या बाजूचा खेळाडू पहिला. त्याला नियम काय आहे याची काहीच कल्पना नसल्यामुळे आपल्या हातातील एक पत्ता त्या उताण्या केलेल्या पत्त्यावर उताणा टाकतो. कर्मधर्मसंयोगाने त्याने टाकलेला पत्ता ठरविलेल्या नियमानुसार

योग्य असेल तर नेता 'बरोबर' असे म्हणेल व त्याचा पत्ता पहिल्या पत्त्यावर राहील. योग्य नसेल तर 'चूक' म्हणेल. खेळी चुकीची झाली तर खेळाडूने आपण टाकलेला पत्ता उचलून आपल्यासमोर ठेवायचा. त्यानंतर पुढच्या खेळाडूने नियम काय असावा याचा अंदाज करून आपल्या हातातील एक पान टाकायचे. नेत्याने 'बरोबर' म्हटले तर ते पान तेथेच राहील, 'चूक' म्हटले तर ते पान उचलून त्या खेळाडूने आपल्यासमोर ठेवायचे. नंतर त्याच्यापुढील खेळाडूने आपल्या हातातील एक पत्ता टाकायचा. 'चूक' म्हटल्यास तो पत्ता उचलून आपल्यासमोर ठेवायचा, 'बरोबर' म्हटल्यास तेथेच राहू द्यायचा.

याप्रमाणे सर्व खेळाडूंच्या हातातील पत्ते संपेपर्यंत खेळत राहायचे. म्हणजे तो डाव संपला. अशा तऱ्हेने अगदी पहिला पत्ता व 'योग्य खेळी' झालेले पत्ते टेबलावर मधोमध राहतील व 'अयोग्य खेळीचे' पत्ते प्रत्येक खेळाडूजवळ ठेवलेले असतील. अर्थातच ज्या खेळाडूला नियम प्रथम समजला असेल (अगर नियम न समजताही नशीब बलवत्तर असेल) तो योग्य असेच पत्ते टाकत राहील व त्याच्याजवळ सर्वांत कमी 'अयोग्य' पत्त्यांची रास शिल्लक राहील. हे अयोग्य पत्ते आपल्याजवळ किती राहिले आहेत ते प्रत्येकाने नेत्याला सांगायचे व तो त्यांची यादी करील. सर्वांत कमी अयोग्य पत्ते जवळ राहिलेला खेळाडू हा त्या डावाचा 'सर्वोत्तम' खेळाडू असे म्हणायचे. एवढे झाल्यावर प्रत्येकाला मिळालेल्या गुणांची आकडेमोड खालीलप्रमाणे करायची.

नेत्याला मिळावयाचे गुण : नेता प्रत्यक्ष पाने टाकीत नसला, तरी डाव चालविण्याबद्दल त्याला गुण द्यायचे ते असे : सर्वोत्तम खेळाडूचे जे अयोग्य पत्ते राहिले असतील त्यांच्या संख्येला नेता व सर्वोत्तम खेळाडू हे दोन सोडून जेवढे खेळाडू राहतील त्यांच्या संख्येने गुणायचे व आलेला गुणाकार इतर (नेता व सर्वोत्तम खेळाडू सोडून) खेळाडूंजवळ राहिलेल्या अयोग्य पत्त्यांच्या संख्यांच्या बेरजेतून वजा करायचा. जी वजाबाकी येईल, तेवढे नेत्याचे गुण.

इतर खेळाडूंना द्यावयाचे गुण : नेता व संबधित खेळाडू सोडून राहिलेल्या खेळाडूंची संख्या व त्या खेळाडूजवळ राहिलेल्या अयोग्य पत्त्यांची संख्या यांचा गुणाकार (वरच्या प्रमाणेच) इतर खेळाडूंजवळ राहिलेल्या अयोग्य पत्त्यांच्या संख्यांच्या बेरजेतून वजा करायचा. आलेली वजाबाकी हे त्या खेळाडूचे गुण. वजाबाकी ऋण आली, तर त्या खेळाडूचे गुण 'शून्य' धरायचे.

बोनस गुण : एखाद्या खेळाडूकडे एकही अयोग्य पत्ता राहिला नसेल, तर त्याला **आणखी** 6 गुण बोनस म्हणून द्यायचे.

खाली दिलेल्या दोन उदाहरणांवरून गुणांची मोजणी कशी करायची ते

अधिक स्पष्ट होईल.

नेत्याखेरीज A, B व C हे तीन खेळाडू आहेत व त्यांच्याजवळ राहिलेल्या अयोग्य पत्त्यांच्या संख्या अनुक्रमे 9, 4 व 3 अशा आहेत, असे समजू. मग सर्वोत्तम खेळाडू C व इतर खेळाडूंची संख्या 2. त्यामुळे गुण खालीलप्रमाणे :

नेत्याचे गुण : (9 + 4) - (2 × 3) = 13 - 6 = 7

A चे गुण : (4 + 3) - (2 × 9) = 7 - 18 = ऋण संख्या. म्हणून गुण 0.

B चे गुण : (9 + 3) - (2 × 4) = 11 - 8 = 3.

C चे गुण : (9 + 4) - (2 × 3) = 13 - 6 = 7.

सर्वोत्तम खेळाडूजवळ राहिलेल्या अयोग्य पत्त्यांची संख्या **शून्य नसेल,** तेव्हा त्याचे व नेत्याचे गुण सारखेच असतील. ती संख्या जेव्हा शून्य असेल तेव्हा सर्वोत्तम खेळाडूचे गुण नेत्याच्या गुणांपेक्षा 6 ने अधिक असतील.

दुसरे उदाहरण पाहा. नेत्याखेरीज X, Y, Z व W असे चार खेळाडू आहेत व त्यांच्याजवळ राहिलेल्या अयोग्य पत्त्यांच्या संख्या अनुक्रमे 1, 2, 9 व 0 अशा आहेत. मग सर्वोत्तम खेळाडू W व राहिलेले खेळाडू 3. त्यामुळे,

नेत्याचे गुण : (1 + 2 + 9) - (3 × 0) = 12 - 0 = 12

X चे गुण : (2 + 9 + 0) - (3 × 1) = 11 - 3 = 8

Y चे गुण : (1 + 9 + 0) - (3 × 2) = 10 - 6 = 4

Z चे गुण : (1 + 2 + 0) - (3 × 9) = ऋण संख्या, म्हणून गुण 0

W चे गुण : (1 + 2 + 9) - (3 × 0) + 6 (बोनस) = 18

प्रत्येक डावाला नेता बदलावा.

* * * *

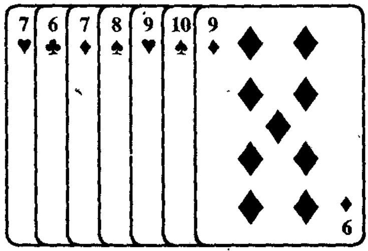
हा खेळ खेळताना एखाद्या नेत्याने केलेला नियम पत्त्यांच्या किमतीवरही अवलंबून असेल. साधारणपणे 'एक्का' हा सर्वांत मोठा पत्ता असे पत्त्यांच्या पुष्कळशा खेळांत धरतात. या खेळात एक्क्याची किंमत 1. दुर्री ते दहल्यापर्यंतच्या पत्त्यांच्या किमती त्यांवर असणाऱ्या ठिपक्यांएवढ्या, म्हणजे 2 पासून 10 पर्यंत. गुलाम, राणी व राजा यांच्या किमती अनुक्रमे 11, 12 व 13.

* * * *

खेळाचा गाभा समजला की नाही? असे किती डाव खेळायचे ते प्रथम ठरवावे व तेवढ्या डावांतील एकूण गुणांवर खेळाडूंची क्रमवारी लावावी.

आपल्यापुढे आता प्रश्न उभा राहिलेला आहे तो हा की, नेत्याने ठरविलेला नियम कसा शोधून काढायचा? नियम शोधून काढणे ही बाब तशी सोपी नाही.

समजा, नेत्याने 'बरोबर' किंवा 'योग्य' म्हटलेले (म्हणजे टेबलाच्या मध्यावर उताणे टाकलेले) पत्ते खालील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे आहेत. नेत्याने प्रथम उताणा केलेला पत्ता बदाम सत्त्या.



हे पत्ते पाहून ठरविलेल्या नियमाबाबत निरनिराळे निष्कर्ष काढता येतील. त्यांपैकी तीन खाली दिले आहेत.

(1) सम किमतीच्या पत्त्यावर विषम किमतीचा पत्ता टाकावा व विषम किमतीच्या पत्त्यावर सम किमतीचा पत्ता टाकावा.

(2) प्रत्येक पत्त्यावर त्याच्या किमतीपेक्षा 1 ने लहान अगर 1 ने मोठी किंमत असलेला पत्ता टाकावा. राजापेक्षा 1 ने मोठा एक्का धरावा.

(3) तांबड्या रंगाच्या (चौकट किंवा बदाम) पत्त्यावर काळ्या रंगाचा (किल्वर किंवा इस्पिक) पत्ता टाकावा व काळ्या रंगाच्या पत्त्यावर तांबड्या रंगाचा पत्ता टाकावा.

वरील आकृतीत दाखविलेल्या पत्त्यांवरून नियमाबद्दलचे वरील तिन्ही निष्कर्ष लागू पडतात; पण त्यापुढील खेळाडूने चौकट नहिल्यावर बदाम राणी टाकली व त्याची खेळी नेत्याने 'बरोबर' ठरविली, तर दुसरा व तिसरा निष्कर्ष बाद होतात व पहिला निष्कर्ष 'बरोबर' ठरतो. ही बाब ज्या खेळाडूने हेरली असेल त्याला आपण टाकलेले सर्व पत्ते योग्य झाल्यामुळे बोनस गुणांची अपेक्षा करता येईल.

वरील नियमांपेक्षा कठीण नियम बनविता येतील. त्यांचा मासला खाली दिला आहे.

(1) टाकावयाच्या पत्त्याची किंमत खाली असलेल्या पत्त्याच्या किमतीएवढीच असावी किंवा खालच्या पत्त्याच्या बाजूचाच (म्हणजे चौकट असेल तर चौकट, बदाम असेल तर बदाम) असावा.

(2) सम किमतीच्या पत्त्यावर किल्वर किंवा चौकटचा पत्ता टाकावा; विषम

किमतीच्या पत्त्यावर बदाम किंवा इस्पिकचा पत्ता टाकावा.

वरीलपैकी पहिल्या नियमाला धरून बदाम दहल्या, बदाम छक्का, इस्पिक छक्का, इस्पिक राणी, इस्पिक गुलाम, चौकट गुलाम, चौकट तिर्री, बदाम तिर्री व बदाम गुलाम अशी योग्य ठरलेली पाने एकावर एक पडली. तशी पाने प्रत्यक्ष घेऊन तो नियम ठरविता येईल का, त्याचा अनुभव घ्यावा.

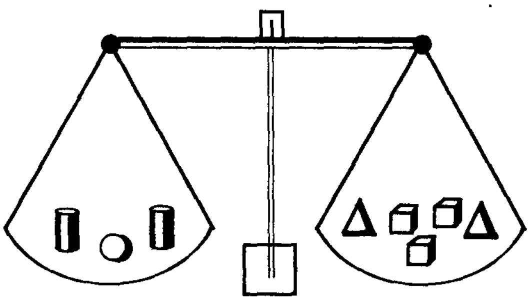
इस्पिक नहली, बदाम दहली, किल्वर राणी, चौकट दहली, किल्वर पंजी, बदाम राणी, किल्वर सत्ती, इस्पिक अठ्ठी, किल्वर दहली, चौकट एक्का, बदाम गुलाम, इस्पिक तिर्री ही पाने योग्य म्हणून खाली पडलेली आहेत, तर इस्पिक तिर्रीवर कोणत्या प्रकारचे पान टाकावे, हे ठरविता येते का बघा.

* * * *

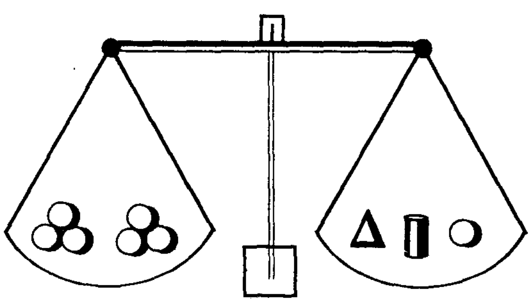
वरीलसारखे कठीण नियम केले, तर पुष्कळदा आपले पान अयोग्य ठरून परत घ्यावे लागल्यामुळे खेळात रस राहणार नाही. म्हणून वीस-पंचवीस सोपे नियम तयार करून त्यांची यादी करून ठेवावी. त्यांपैकी एखादा नियम नेत्याने निवडावा व तो नीट लक्षात ठेवावा. त्याचा फक्त क्रमांक डाव सुरू करण्यापूर्वी लिहून ठेवावा.

20. तराजू

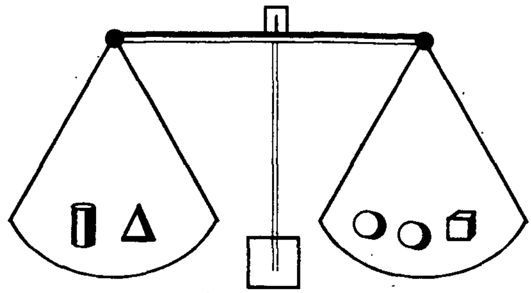
समीकरणांच्या उकली काढण्याचे प्राथमिक धडे देताना पुष्कळ पाठ्यपुस्तकांत तराजूची चित्रे दाखवून समीकरणांच्या उकली काढण्याचे नियम समजावून दिलेले आढळतात. खाली पहिल्या तीनं आकृत्यांमध्ये जिन्नस व वजने तराजूच्या पारड्यात न टाकता गोल, घन, दंडगोल व शंकू या घनाकृती वापरून तराजू समतोल करून दाखविले आहेत. म्हणजे निराळ्या स्वरूपात तीन समीकरणेच दिली आहेत, असे म्हणता येईल.



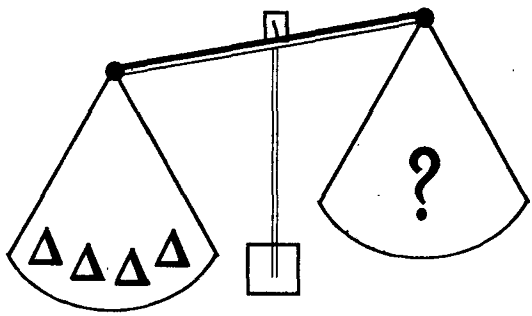
आकृती – 1



आकृती – 2



आकृती – 3



या पहिल्या तीन आकृत्यांतील माहितीचा उपयोग करून चौथ्या आकृतीतील तराजूच्या रिकाम्या पारड्यात कमीत कमी कोणत्या वस्तू (वरच्या तराजूत वापरलेल्या चार प्रकारच्या वस्तूंपैकी) टाकल्या, तर दोन्ही पारडी समतोल होतील, हे शोधून काढा.

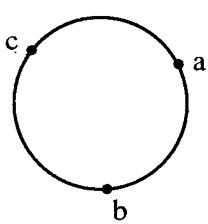
21. चक्रीय संख्या

चक्र किंवा त्या शब्दापासून बनलेले इतर शब्द खरोखरीच 'चक्रम' असावेत, असे आमचे मत झालेले आहे. आमचा शेजारी बंटी, चक्रीय चौकोनांवरील प्रमेये शिकताना अगदी वेडापिसा व्हायचा. त्याचे डोके गरगर, वर्तुळासारखे फिरते आहे, असे तो म्हणायचा.

आमच्या वेळी माध्यमिक शाळेतील शेवटची इयत्ता अकरावी. त्या वेळच्या अकरावीच्या बीजगणिताच्या अभ्यासक्रमात 'चक्रीय राशी व त्यांचे अवयव' असे एक प्रकरण असायचे. मला चांगले आठवते की, चक्रीय राशींच्या अवयवांवरील प्रश्न सोडविताना खरोखरीच डोके गरागरा फिरायला लागायचे.

बीजगणित व भूमिती या गणिताच्या दोन्ही शाखांमध्ये 'चक्रीय' हा शब्द येतो. तसाच तो अंकगणितात म्हणजे संख्यांच्या बाबतीत कधी ऐकला नव्हता. त्या दिवशी विकीने नेमका हाच प्रश्न विचारला. त्या वेळी त्याचे समाधान होईल असे उत्तर काही देता आले नाही; पण एक गोष्ट निश्चित की, त्या प्रश्नाने आम्हाला चांगलेच गरगरावले. विचारचक्र सुरू झाले. त्या विचारचक्राचा परिपाक म्हणजे खाली दिलेले चऱ्हाट!

वर्तुळावर तीन बिंदू घेतले व त्यांना a, b, c अशी नावे दिली. कोणत्याही



बिंदूपासून सुरुवात करून घड्याळाच्या काट्यांच्या गतीच्या दिशेने गेलो, तर (a, b, c), (b, c, a), (c, a, b) अशी त्या तीन बिंदूंचा क्रम असलेली त्रिकुटे मिळतात. हा क्रम उलट केला, म्हणजे घड्याळाच्या काट्यांच्या गतीच्या उलट दिशेने गेलो, तर (a, c, b), (c, b, a), (b, a, c) अशी त्रिकुटे तयार होतील.

आपण घड्याळाच्या काट्यांच्या गतीचा क्रम वापरू. तो क्रम सांभाळून

$a^2 (b - c) + b^2 (c - a) + c^2 (a - b)$,

$b^3 (c^2 - a^2) + c^3 (a^2 - b^2) + a^3 (b^2 - c^2)$,

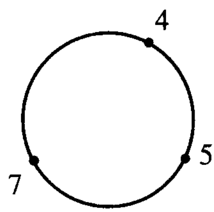
इत्यादी चक्रीय राशी तयार करता येतात. या राशींमध्ये चक्रीय संमिती आहे असे म्हणतात. या राशींचे अवयव खालीलप्रमाणे :

- (a - b) (b - c) (c - a),

- (a - b) (b - c) (c - a) (ab + bc + ca)

या अवयांमध्येही चक्रीय संमिती आढळते.

विकीच्या प्रश्नाने जे विचारचक्र सुरू झाले त्यातील पहिली पायरी म्हणजे वर्तुळावर तीन बिंदू घेऊन त्यांना अंकांची नावे देऊन पाहणे.



आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे 4, 5, 7 हे अंक घेतले. त्यांच्यापासून 457, 574, 745 या तीन अंकी संख्या मिळाल्या. त्यांचे अवयव पाडून पाहिले. 457 ही पहिलीच संख्या अविभाज्य संख्या निघाली. त्यामुळे संमितीच्या शोधाचे वाटोळे झाले.

मग 3, 5, 9 हे तीनही विषम अंक घेऊन पाहिले. त्या अंकांपासून मिळालेल्या 359, 593, 935 या संख्यांपैकी पहिल्या दोन्ही मूळ संख्या असल्यामुळे कोणत्याही प्रकारचा आकृतिबंध दृष्टिपथात येईना. म्हणून तिन्ही अंक सम घेऊन पाहू या, असा विचार मनात आला.

शून्य हा सम अंक खरा; पण पहिला अंक शून्य असणारी विशिष्ट अंकी संख्या नसते. म्हणून शून्याचा नाद सोडणेच भाग होते. 2, 4, 6, 8 या सम अंकांपैकी 2, 4, 6 हे अंक घेऊन पाहू असा विचार मनात आला. तसे करण्याचे कारण 2 ने वाढत जाणारे अंक घेतले, तर काहीतरी आकृतिबंध मिळावा, ही आशा. त्या अंकांपासून तयार झालेल्या संख्यांचे अवयव

246 = 2 × 3 × 41

462 = 2 × 3 × 7 × 11

624 = 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 13

असे आले आणि विचारचक्राचे 3×13 च झाले.

वाटेल तसे अंक निवडून काही पदरात पडणार नाही, हे नक्की झाले, तरीसुद्धा आणखी एक प्रयत्न करून पाहावा असे वाटले आणि 2, 5 व 9 हे अंक घेतले. 259, 592 आणि 925 या संख्या तयार झाल्या. त्यांचे अवयव काढले.

259 = 7 × 37

592 = 2 × 2 × 2 × 2 × 37

925 = 5 × 5 × 37

आशेच्या किरण दिसला. 2 5 व 9 या अंकांपासून तयार झालेल्या चक्रीय संख्यांचा 37 हा साधारण अवयव आहे, असे ध्यानात आले. हा चमत्कार आहे असे वाटून एकीकडे मन हरखून गेले, तर दुसरीकडे विचारांचे काहूर उठले.

साधारण अवयव असलेल्या दुसऱ्या काही चक्रीय संख्या असतील का? अशा तीन अंकी संख्या किती व कोणत्या? त्या शोधून काढण्यासाठी काहीतरी तार्किक बैठक असेल का?

या प्रश्नांच्या निरसनासाठी बीजगणिताची कास धरावी, असे वाटले.

a, b, c हे तीन अंक निवडले, तर त्यांच्यापासून

$$100a + 10b + c,\ 100b + 10c + a,\ 100c + 10a + b$$

अशा चक्रीय संख्या मिळतात. या तीन संख्यांना साधारण अवयव असेल, तर तो त्यांच्या बेरजेचाही अवयव असला पाहिजे. बेरजेचा विचार डोक्यात येण्याचे कारण बेरजेत a, b, c या तिघांचे अंकगुणक सारखे होतात.

त्या तिन्ही संख्यांची बेरीज

$$111\ (a + b + c)$$

$$= 3\times 37\ (a + b + c),$$

म्हणजे 3 किंवा 37 हे अवयव असलेल्या संख्या तपासून पाहिल्या पाहिजेत, असा विचार कायम झाला. 3 च्या 34 व्या पटीपासून 333 व्या पटीपर्यंतच्या पटसंख्या (म्हणजे एकूण 300) तीन अंकी संख्या असतील. त्यांपैकी 3 ने भाग जाणाऱ्या 100 संख्या या चक्रीय संख्या असतील व चक्रीय राशींमध्ये 'चक्रीय संमिती' हा विशेष गुणधर्म आढळतो, *तसा* **'3 हा साधारण अवयव'** असेल, असा **विशेष गुणधर्म** मिळेल.

3 ही एक अंकी संख्या असल्यामुळे व चक्रीय संख्यांची पुष्कळ त्रिकुटे तयार होणार असल्यामुळे त्या विशेष गुणधर्माचे आकर्षण वाटेनासे झाले; पण तीन अंकी चक्रीय संख्येस एका विशिष्ट दोन अंकी संख्येने निःशेष भाग जातो, असा विशेष गुणधर्म मिळाल्याने समाधान, नुसते समाधान नव्हे, तर गणिती आनंद असे काहीतरी म्हणतात, त्याचा प्रत्यय आला. विकीला शतशः धन्यवाद!

दुसऱ्या दिवशी विकीला बोलावून वरील विचारमंथन त्याला ऐकविले. तोही खूष झाला.

विकी म्हणाला, "या विशेष गुणधर्माचा उपयोग होईल व माझ्या विचारांना चालना मिळेल असं काहीतरी खाद्य द्याना सर."

"माझी अपेक्षा होतीच की, तू असं काहीतरी म्हणणार. तू स्वस्थ बसणार नाहीस," मी म्हटले.

त्यानंतर विकीला काही प्रश्न दिले. तुम्हीही विकीला मदत कराल ना ते प्रश्न सोडवायला?

1) दोन अंकी विशिष्ट संख्येने निःशेष भाग जाणाऱ्या तीन अंकी चक्रीय संख्या किती आहेत?

2) त्यांपैकी लहानांत लहान व मोठ्यांत मोठ्या अशा कोणत्या संख्या आहेत की, ज्यांमधील अंकांच्या चक्रीय परिवर्तनाने बाकीच्या संख्या मिळतात?

3) काही चार अंकी संख्या अशा आहेत की, एक संख्या व तिच्या अंकांच्या चक्रीय परिवर्तनाने मिळणाऱ्या तीन संख्या अशा चार संख्यांना एका विशिष्ट दोन अंकी संख्येने निःशेष भाग जातो, तर ती दोन अंकी संख्या कोणती?

4) प्रश्न क्र. 3 मधील चार अंकी लहानांत लहान संख्या कोणती की, जिला व अंकांच्या परिवर्तनाने मिळणाऱ्या तिच्या जोडीच्या तीन चक्रीय संख्या यांना त्या प्रश्नाच्या उत्तरातील विशिष्ट दोन अंकी संख्येने निःशेष भाग जातो?

5) ABCDE, BCDEA, CDEAB, DEABC व EABCD या संख्यांमधील अक्षरे अंकांसाठी वापरली आहेत. या पाचही संख्यांना एका विशिष्ट दोन अंकी संख्येने निःशेष भाग जातो, तर ती विशिष्ट दोन अंकी संख्या कोणती?

6) प्रश्न क्र. 5 मधील लहानांत लहान व मोठ्यांत मोठी अशा ABCDE या संख्या कोणत्या?

22. युगे अठ्ठावीस

असे म्हणतात की, मानवी संस्कृतीच्या विकासाचा इतिहास आणि गणिताचा इतिहास हे एकाच रथाचे समगतीने चालणारे, धावणारे, काही वेळा सुस्त होऊन बसणारे दोन घोडे आहेत. गणितशास्त्र हे मानवाने त्याच्या सोयीसाठी निर्माण केलेले शास्त्र आहे. मानवाच्या गरजा जसजशा वाढत गेल्या, तसतशा त्या गरजा भागविण्यासाठी गणितशास्त्राचा विकास होत गेला.

प्राचीन काळी मानवाच्या गरजा अत्यल्प होत्या. आपली टोळी, मालकीची गुरेढोरे, इत्यादींचा हिशेब ठेवण्यासाठी थोड्याशा गणन संख्यांच्या (मोज संख्यांच्या वा नैसर्गिक संख्यांच्या) पलीकडे जाण्याची मानवाला गरज भासली नाही. पुढे या टोळ्या जसजशा सुसंस्कृत होत चालल्या, तसतसे व्यापार-उदीम, देवाणघेवाण, भागीदारीत वाटणी वगैरे सारखे व्यवहार होऊ लागले. हे व्यवहार सुरळीत चालण्यासाठी अपूर्णांकांची कल्पना व त्यांवरील क्रिया करता येणे क्रमप्राप्त होते. आधुनिक धावत्या जगाच्या गरजा फारच विलक्षण गतीने वाढल्या आहेत. कॉम्प्युटर ही आता सर्व क्षेत्रांत अनिवार्य बाब होत आहे.

हे सर्व जरी खरे असले, तरी मानव हा केवळ खातापिता प्राणी नाही. त्याच्या डोक्यालाही खाद्य लागते, मनोरंजनाचीही गरज असते. चित्रकला, नाट्यकला आदी गोष्टींनी मनोरंजनाची बाब आपल्या शिरावर घेतली. गणितशास्त्राने दोन्ही गोष्टींचा– मनोरंजनाचा, तसेच वैचारिक खाद्याचा– पुरवठा केला आहे, करीत आहे व करीत राहील. कूट प्रश्न, कोडी, गणिती झुंजी या गोष्टी अगदी प्राचीन काळापासून मानवाचे मनोरंजन करीत आल्या आहेत, विचारांना चालना देत आल्या आहेत. आश्चर्याची बाब अशी की, अगदी प्राचीन काळापासून चालत आलेले कूट प्रश्न, जरी त्यांचे स्वरूप कालानुरूप थोडेसे बदलत आले असले, तरी आबालवृद्धांची सेवा करीत आहेत. प्रश्नपंढरीचा विठोबा अठ्ठावीस युगे लोटली तरी गणितभक्तांची मनोकामना पूर्ण करीत आला आहे. या विधानाचा पुरावा खालील कूट प्रश्न देतील.

1. नदी पार करणे :

(a) लांडगा, बकरी आणि भाजीची टोपली या तीन वस्तू नदीपार करण्याची वर्दी एक नावाडी स्वीकारतो; पण त्याची होडी फारच लहान असल्यामुळे तो वरील तीन वस्तूंपैकी (उतारूंपैकी, म्हणा पाहिजे तर) एकच वस्तू आपणाबरोबर नेऊ शकतो. मग अडचण कसली? या तीन उतारूंपैकी नटखट उतारू म्हणजे बकरी. कारण त्याने भाजीची टोपली नेण्याचे ठरविले, तर ती पैलतीरावर सोडून परत येईपर्यंत लांडग्याने बकरीचे एखादे हाडूक तरी शिल्लक ठेवले असेल की नाही याची वानवा! लांडग्याला प्रथम नेले, तर बकरी भाजीच्या टोपलीची काय वासलात लावील याची शाश्वती नाही.

म्हणून प्रथम बकरीला नेऊन सोडावयाचा निर्णय अगदी सुरक्षित. पण दुसऱ्या खेपेला भाजीची टोपली नेली काय किंवा लांडग्याला नेले काय, पैलतीरावर वरच्या सारखीच आफत उभी राहील.

आपल्या मनात असा विचार येणे साहजिक आहे, कोणाच्या सुपीक डोक्यातून हे कोडे प्रथम बाहेर आले? पण त्या प्रश्नाचे उत्तर देणे कठीण आहे. एक गोष्ट मात्र नक्की की, या कोड्याचे केस पांढरे झाले तरी ते अजून तारुण्यावस्थेत आहे. आमच्या चार-पाच हजार वस्तीच्या गावातसुद्धा आम्ही प्राथमिक शाळेत होतो तेव्हा हे कोडे आम्ही ऐकले होते. इसवी सनापूर्वी कित्येक शतके आधी हे कोडे भारतात प्रचलित होते. पाश्चात्त्य देशांत त्याचा उल्लेख इसवी सनाच्या आठव्या शतकात एका शिक्षकाने लिहिलेल्या पुस्तकात आढळतो.

या प्रश्नाची उकल सांगितली, तर ती अगदी सोपी आहे. मानवी स्वभावाचा कधीकधी घातक ठरणारा एक पैलू आहे. त्यातून निर्माण होणारा मोह टाळला, तर या प्रश्नाची उकल सहज होते. आपणाजवळ असलेल्या किंवा प्राप्त झालेल्या वस्तूंचा मोह. प्राप्त झालेल्या वस्तूंपैकी काही वस्तूंचा त्याग करणे अंतिम फायद्याचे ठरते. 'विषम काले समुत्पन्ने अर्धं त्यजति पंडितः' ही म्हण लक्षात ठेवावी.

त्या नाविकाने जो मोह टाळला त्याबद्दल त्याचे अभिनंदन वेगळ्याच तऱ्हेने केले गेले. याच प्रकारची आणखी काही कोडी निर्माण झाली ती त्या नाविकाने योजलेल्या युक्तीची नक्कल करून. अशाच प्रकारची कल्पना उकलीसाठी वापरावी लागेल, असा खालील कूटप्रश्न पाहा.

(b) काही सैनिकांना एका नदीच्या एका तीरावरून पलीकडच्या तीरावर जायचे होते. त्यांना दोन मुले नदीच्या पात्रात एक होडी वल्हवीत असलेली

दिसली. त्यांनी त्या मुलांना बोलावून सांगितले की, आम्हाला पलीकडच्या तीरावर जायचे आहे. तुम्ही तुमच्या होडीतून आम्हाला न्याल का?

मुले म्हणाली, "आमची होडी फारच लहान आहे. तुमच्यापैकी एकेकाचेच वजन झेपेल किंवा आम्हा दोघांचे वजन झेपेल. दोन्ही मुलांना होडी वल्हविता येत होती; तसेच त्या सैनिकांपैकी प्रत्येकाला होडी वल्हविता येत होती, तर ते सैनिक पलीकडच्या तीरावर जाऊ शकले का? गेले असल्यास कसे गेले असतील?

त्याच धर्तीचा खालील प्रश्न तुम्हाला सोडविता येतो की काय ते पाहा.

(c) श्री. बडजात्या यांच्या कुटुंबात चार माणसे आहेत. ते स्वतः, त्यांच्या सौभाग्यवती, मुलगा संजू व मुलगी मंजू. त्या कुटुंबाचा एक लोंबणाऱ्या लांब कानांचा टॉमी नावाचा केसाळ कुत्रा आहे. श्रीयुत व सौ. बडजात्या यांचे वजन प्रत्येकी 75 किलोच्या आसपास (पण थोडे कमी), तर मुलगा व मुलगी यांचे प्रत्येकी 35 किलोच्या आतबाहेर आहे. कुत्रा खाऊन पिऊन चांगला लठ्ठ झालेला आहे. त्याचे वजनही सुमारे 10 किलो आहे. नाताळच्या सुटीत हे सर्व कुटुंब आपल्या आवडत्या कुत्र्यासह सहलीला निघाले. वाटेत एक नदी ओलांडावयाची होती. किनाऱ्यावर एक होडी होती. ती स्वतः वल्हवून न्यायची होती. होडीत 75 किलोपेक्षा जास्त वजन झाल्यास धोकादायक आहे, अशी सक्त ताकीद मोठ्या अक्षरांत लिहिलेली होती. संजू हा हुशार मुलगा होता व त्याला 'लांडगा-बकरी-भाजी' हे कोडे व त्याची उकल माहीत होती. तर ते कुटुंब कुत्र्यासह नदीपार कसे गेले?

(d) दोन संशयी नवरे व त्यांच्या पत्नी अशा चौघांना एक नदी पार करावयाची आहे. अशा प्रकारच्या कूट प्रश्नात होडी असते; पण नावाडी नसतो. त्याप्रमाणे होडी होती. होडीत दोन माणसे मावणार होती. तर, कोणत्याही वेळी एक स्त्री आपला नवरा नसताना दुसरीच्या नवऱ्याबरोबर असणार नाही अशा रीतीने ती चौघे नदी कशी पार करतील? (सर्वांना होडी वल्हविता येते, हे गृहीत धरायचे.)

हे कूटप्रश्न सोडविण्यात मोठीशी अडचण येणार नाही. संशयी नवऱ्यांच्या प्रश्नाची उकल पाच पायऱ्यांत करता येते; पण तीन जोडपी – सर्व नवरे अर्थात संशयी – असतील, तर प्रश्न थोडा गुंतागुंतीचा होतो, तरीसुद्धा तो प्रश्न खालीलप्रमाणे सोडविता येतो.

तीन स्त्रियांपैकी दोन स्त्रिया प्रथम पैलतीरी जाऊन त्यांच्यापैकी एक जण होडी परत आणते व तिसऱ्या स्त्रीला पैलतीरी नेते व परत येते आणि आपल्या

नवऱ्याजवळ राहते. दुसरे दोन नवरे होडी घेऊन पैलतीरावर जातात व तेथून एक जोडपे होडी परत आणते. त्यांच्यापैकी पत्नी तेथे थांबते व दोन्ही नवरे पैलतीरी जातात. पैलतीरी असलेले स्त्री होडी परत आणते. आता पहिल्या तीरावर तीन स्त्रिया राहिल्या. त्यांच्यापैकी दोघी जणी होडी घेऊन पैलतीरी जातात. त्यांच्यापैकी एक जण परत येऊन राहिलेल्या तिसऱ्या स्त्रीला घेऊन जाते. (त्या ऐवजी तिचा नवरा होडी घेऊन येतो व तिला पैलतीराला नेतो, असे योग्य होईल.)

वरील परिच्छेदातील पायऱ्या खालील तक्त्यात दाखविल्याप्रमाणे दिसतील. नवऱ्यांना A, B, C अशी नावे देऊ व स्त्रियांची नावे अनुक्रमे X, Y, Z अशी ठेवू.

		पहिला तीर	पैलतीर
मूळची परिस्थिती	:	A,B,C; X,Y,Z	कोणी नाही
पहिली पायरी	:	A,B,C; X	Y,Z
दुसरी पायरी	:	A,B,C; X,Y	Z
तिसरी पायरी	:	A,B,C;	X,Y,Z
चवथी पायरी	:	A,B,C; X	Y,Z
पाचवी पायरी	:	A, ; X	Y,Z; B,C
सहावी पायरी	:	A,B,;X,Y	Z; C
सातवी पायरी	:	X,Y	Z; A,B,C
आठवी पायरी	:	X,Y,Z	A,B,C
नववी पायरी	:	Z	X,Y; A,B,C
दहावी पायरी	:	X,Z	Y; A,B,C
अकरावी पायरी	:	कोणी नाही	X,Y,Z; A,B,C

तीन जोडप्यांच्या वरील उकलीच्या जोरावर चार जोडप्यांचा प्रश्न कोणी सोडवू म्हणेल, तर ते एक स्वप्न ठरेल. कारण, जास्तीत जास्त दोनच माणसे घेऊन जाणाऱ्या होडीने चार जोडप्यांचा प्रश्न सोडविणे केवळ अशक्य आहे.

तीन माणसे नेऊ शकणाऱ्या होडीने पाच जोडप्यांना नदी पार करता येते, पण सहा किंवा अधिक जोडप्यांच्या बाबतीत ते अशक्य आहे, असे महान गणितज्ञाने (मॉरिस क्रेटचिक यांनी) दाखवून दिले आहे.

2. ओताओती :

कूटप्रश्नांचा युगेन् युगे चालत आलेला एक प्रकार आपण पाहिला. प्राचीन काळापासून आजतागायत गणितप्रेमींची मने आकर्षित करून घेणारा कूटप्रश्नांचा दुसरा प्रकार 'ओताओत करण्याचा.' या प्रकारातील प्रसिद्ध कोडेही आम्ही आमच्या लहानपणी ऐकलेले आहे. तुम्हालाही ते परिचित असेल. पाहा बरे.

एका गवळ्याजवळ दुधाने भरलेली आठ लीटरची कासंडी आहे. तीन लीटर व पाच लीटर मापाच्या दोन रिकाम्या कासंड्याही आहेत. कोणतेही दूध मोजण्याचे मापाचे भांडे गवळ्याजवळ नव्हते. दोन गिऱ्हाइके आली. त्यांना प्रत्येकी चार लीटर दूध हवे होते, तर असलेल्या कासंड्यांच्या साह्याने दोघांना चार-चार लीटर दूध कसे वाटून देता येईल?

प्रयत्न प्रमादाची रीत वापरून प्रश्नाची उकल करता येईल. केलेल्या प्रयत्नांची नोंद ठेवली, तर उकलीसाठी लागणाऱ्या पायऱ्यांची संख्या कमी करता येईल. आठ, पाच व तीन लीटरच्या कासंड्यांमधील दुधाची नोंद (3,5,0) अशी केली, तर त्या नोंदीचा अर्थ आठ लीटरच्या कासंडीतील दुधाने पाच लीटरची कासंडी भरली. या कृतीमुळे आठ लीटरच्या कासंडीत 3 लीटर दूध राहिले, पाच लीटरच्या कासंडीत पाच लीटर व तीन लीटरच्या कासंडीत 0 लीटर दूध राहिले.

याप्रमाणे नोंदी करून सात पायऱ्यांत उकल कशी होते हे खालील तक्त्यावरून ध्यानात येईल. (मूळची स्थितीची पायरी सोडावयाची).

पायऱ्या क्रमांक	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
8 लीटरची कासंडी	8	3	3	6	6	1	1	4
5 लीटरची कासंडी	0	5	2	2	0	5	4	4
3 लीटरची कासंडी	0	0	3	0	2	2	3	0

प्रयत्न-प्रमाद रीत वापरावयाची असे वर म्हटले; पण प्रयत्नाला सुरुवात कोठून करावयाची? कोणती सूचक बाब आपल्या कामी येईल?

ब्रिटिश गणिती डॉ. डब्ल्यू. डब्ल्यू. सॉयर यांनी या कोड्याचा विचार करून अशा प्रकारच्या कोड्यांच्या उकलीसाठी सर्वसाधारण नियम सांगितले आहेत. वरचे कोडे उदाहरणादाखल घेऊ. त्या कोड्यात असलेल्या कासंड्यांना, कासंडी 8, कासंडी 5 व कासंडी 3 असे संबोधू.

नियम 1 : कासंडी 5 रिकामी असेल, तर ती कासंडी 8 मधील दुधाने भरा.

नियम 2 : कासंडी 5 रिकामी नसेल, तर दोन शक्यता आहेत.

(a) कासंडी 3 भरलेली नसेल, तर ती कासंडी 5 मधील दुधाने भरा.

(b) कासंडी 3 भरलेली असेल, तर तिच्यातील दूध कासंडी 8 मध्ये ओता.

या नियमांचा पुन्हा पुन्हा प्रत्येक पायरीत उपयोग करून उकल काढता येते. वर दिलेल्या उकलीतील प्रत्येक पायरीत या नियमांचा कसा वापर झालेला आहे, ते ताडून पाहा.

(24, 17, 7), (12, 7, 5) इत्यादी कासंड्यांच्या त्रिकुटासाठीही वरील नियमांचा उपयोग (योग्य तो फेरफार करून) करता येईल. स्वतः ताडून पाहा.

3. दंतकथांवर प्रवास करीत आलेल्या या वारशात आणखी कितीतरी कूटप्रश्नांचा समावेश करता येईल. एखादा जिज्ञासू वाचक म्हणेल हा वारसा ठीक आहे; पण चालू शतकात असे कूटप्रश्न तयार झाले नाहीत का? आपल्या मागच्या पिढ्यांनी जो वारसा आपणास दिला तो पुढे चालविणारे या शतकात कोणीच झाले नाहीत का? असे समजण्याचे काहीच कारण नाही. निरनिराळ्या नवीन तऱ्हेचे कूटप्रश्न गणिताला वाहिलेल्या नियतकालिकातून प्रसिद्ध होत असतात, त्यांच्या उकलींबद्दल होणारे वादविवादही प्रसिद्ध होतात. असाच एक कूटप्रश्न म्हणजे 'खोट्या नाण्यावर' आधारलेले कोडे.

जानेवारी 1945 च्या American Mathematical Monthly च्या अंकात खालील कूटप्रश्न प्रसिद्ध झाला. सारखी दिसणारी आठ नाणी व दोन पारड्यांचा तराजू (कोणतीही वजने दिलेली नाहीत) दिलेला आहे. त्या नाण्यांपैकी एक नाणे नकली व इतर नाण्यांपेक्षा थोडे हलके आहे; तर केवळ दोनदा तराजूचा उपयोग करून कोणते नाणे खोटे आहे, हे कसे ओळखता येईल?

फक्त दोनदा तराजूचा उपयोग करण्याच्या अटीमुळे प्रश्न कठीण होतो. नाही तर एका पारड्यात एक नाणे त्याच्याबरोबर इतर नाणी प्रत्येक वेळी एकेक याप्रमाणे वजन करून पाहता येतील. नशीब अगदीच फिरलेले असेल, तर खोटे नाणे ओळखून काढण्यास सात प्रयत्न करावे लागतील. 'लांडगा-बकरी-भाजी' च्या कूटप्रश्नात अशीच अडचण नाही का? प्रत्येक फेरीत 'फक्त एकच वस्तू' नेता येईल ही अडचणीची अट आहे.

हा कूट प्रश्न प्रसिद्ध झाल्यानंतर आठ महिन्यांनंतरच्या त्या मासिकाच्या अंकात उकल प्रसिद्ध झाली, ती अशी : कोणतीही तीन नाणी घेऊन त्यांचे

राहिलेल्या नाण्यांपैकी तीन नाण्यांशी वजन करा. दोन्ही पारडी समतोल झाली, तर खोटे नाणे उरलेल्या दोन नाण्यांमध्ये आहे, असे निश्चित होते. ती दोन नाणी एकमेकांशी वजन करून पाहिली तर हलक्या नाण्याचे पारडे वर जाईल व ते नाणे खोटे आहे, हे निश्चित होईल. जर पहिल्या प्रयत्नातील तीन-तीन नाणी समतोल झाली नाहीत, तर वर जाणाऱ्या पारड्यातील तीन नाण्यांपैकी एक नाणे खोटे असले पाहिजे. त्या तीन नाण्यांपैकी एकेक प्रत्येक पारड्यात टाकले व तराजू समतोल झाला, तर राहिलेले तिसरे नाणे खोटे आहे, असे ठरेल. या दुसऱ्या प्रयत्नात तराजू समतोल झाला नाही, तर वर गेलेल्या पारड्यातील नाणे खोटे आहे, असे म्हणता येईल.

American Mathematical Monthy या मासिकात ही उकल प्रसिद्ध झाल्यानंतर Scripta Mathematica या त्रैमासिकाने अशा प्रकारचा सर्वसाधारण कूटप्रश्न प्रसिद्ध केला. कोणत्याही प्रकारची वजने न वापरता केवळ तीन प्रयत्नांत बारा नाण्यांपैकी एक खोटे असलेले नाणे शोधायचे. ते नाणे इतर नाण्यांपेक्षा हलक्या वजनाचे आहे की जास्त वजनाचे आहे, हेही शोधून काढायचे.

पहिल्या प्रश्नापेक्षा उकलीत आणखी एक बाब जास्त आल्यामुळे वजन करावयाच्या प्रयत्नांत एका जास्त प्रयत्नाची सवलत मिळाली पण त्यामुळे प्रश्नाची उकल करणे सोपे झाले असे नाही. शिवाय, नाण्यांची संख्या वाढली. त्यामुळे उकल करणे अधिकच गुंतागुंतीचे होते. उकलीचे शाब्दिक विवेचन तसे कंटाळवाणे होते. म्हणून प्रत्येक प्रयत्न, त्यामध्ये उपस्थित होणाऱ्या शक्यता व त्यांचे निरसन हे खालील तक्त्यावरून सुलभतेने स्पष्ट होईल, असे वाटते. उकल सुलभ होण्यासाठी प्रत्येक नाणे ओळखता यावे म्हणून काहीतरी खुणा करून घ्याव्यात. आपण त्या नाण्यांना 1 ते 12 हे क्रमांक देऊ. उकल करताना एक महत्त्वाची बाब लक्षात ठेवणे जरुरीचे आहे की, 'फक्त एकच नाणे इतर नाण्यांपेक्षा निराळे आहे.' त्यामुळे एकमेकांशी समतोल होणारी नाणी 'खरी नाणी' असली पाहिजेत.

सुरुवातीला कोणतीही चार नाणी– समजा 1, 2, 3, 4 या क्रमांकांची – इतर चार नाण्यांशी – समजा 5,6,7,8 या क्रमांकांच्या नाण्यांशी वजन करून

प्रकार 1

पहिली पायरी	दुसरी पायरी	तिसरी पायरी
1234 = 5678	(a) 123 = 9, 10, 11	12
		9 = 10 11
	(b) 123 ≠ 9,10,11	9 ≠ 10 .... हलके

प्रकार 2

1234 ≠ 5678	(a) 9,10,11,5 = 3467	(A) 1=2... 8 हलके (B) 1 ≠ 2.... जड असलेले
	(b) 9,10,11,5 ≠ 3467 (>)	A 6 = 7... 8 हलके (B) 6 ≠ 7...हलके असलेले
	(c) 9,10,11,5 ≠ 3467 (<)	(A) 3 = 4...5 हलके (B) 3 ≠ 4... जड असलेले

तिसऱ्या वेळी वजन करताना हलके खोटे की, जड खोटे हे दुसऱ्या पायरीवरून ठरवावयाचे.

वर उल्लेखिलेले मासिक व त्रैमासिक दोन्ही अमेरिकन प्रकाशने आहेत. हा कूटप्रश्न प्रसिद्ध झाल्यापासून लंडनच्या Mathematical Gazette मध्ये या कूटप्रश्नाबाबत टिप्पणी येऊ लागल्या.

एकंदरीत मानव वंशाच्या हुशारीचे झरे आटलेले नाहीत. उलटपक्षी, त्यांचा स्रोत मोठा होत चालला आहे. अमूर्त गणितातील विचारांची उंची ज्या मानाने वाढते, त्यापेक्षा मनोरंजनात्मक गणितातील विचारांची उंची तसूभरही कमी नाही.

4. कागद-पेन्सिलीशिवाय :

सामान्य माणसाची अशी समजूत असते की, 'गणित' म्हटले की 'आकडेमोड' आलीच; पण ही कल्पना अगदी चुकीची आहे. कित्येक जागतिक कीर्तीच्या गणित्यांनी, साध्या बेरीज-वजाबाक्या करताना आपण चुकतो, असे प्रामाणिकपणे म्हटले आहे.

गणितशास्त्राच्या काही शाखांत तर आकडेमोडीला फारसा वाव नसतो. माध्यमिक शाळांतील प्रतलीय भूमितीच्या अभ्यासात बहुधा आकडेमोड नसतेच.

एखाद्या प्रश्नाच्या उत्तरात संख्या शोधावयाची असेल, तर थोडीशी आकडेमोड करावी लागत असेल; पण अशा प्रश्नांमध्ये आकडेमोड ही महत्त्वाची बाब नसून, जी काही आकडेमोड करावी लागेल तिची निवड करण्यासाठी योग्य अशा ज्या विचारांच्या प्रक्रियांची आवश्यकता असते, त्या विचारमालिकेला महत्त्व असते. दिलेल्या प्रश्नातील अटींचे विश्लेषण करण्यासाठी जो बौद्धिक प्रयास करावा लागतो, तोच त्या प्रश्नातील गणिताचा धागा असतो. 'लांडगा-बकरी-भाजी'चे कोडे व त्याच्या साधारण स्वरूपावर आधारलेली कोडी ही वरील विधानाचा प्रत्यय आणून देतात. 'आठ नाण्यांचे कोडे' विश्लेषण आणि

चाणाक्षपणा यांचा उपयोग केल्याशिवाय सुटेल का?

कोणी म्हणतील की, त्या कोड्यांमध्ये 'गणित' कोठे असते? पण या आक्षेपाला एकच उत्तर पुरेसे आहे. गणितशास्त्राला वाहिलेल्या अनेक नियतकालिकांतून ही कोडी प्रसिद्ध होतात, त्या नियतकालिकांवर उड्या पडतात आणि गणितप्रेमी लोक ती कोडी सोडविण्यात तासन् तास घालवून परमानंदाचा लाभ घेत असतात. तो आनंद कराव्या लागणाऱ्या आकडेमोडीपासून मिळत नसतो, तर बौद्धिक प्रयासातून मिळत असतो.

खाली दिलेले प्रश्न तोंडी सोडविता येण्यासारखे आहेत, कागद पेन्सिलीचा विशेष उपयोग करावा लागणार नाही. पाहा बरे प्रयत्न करून! नाहीतर शेवटी दिलेल्या उत्तरांवरून खात्री करून घ्या.

(a) दोन संख्या (पूर्ण संख्याच पाहिजेत असे नाही) अशा शोधून काढा की, त्यांच्यामधील फरक व त्यांचा भागाकार प्रत्येकी 3 शी समान आहे.

(b) एका संख्येच्या सहाव्या हिश्श्याला तिच्या आठव्या हिश्शाने गुणले, तर ती संख्या मिळते. अशी संख्या कोणती?

(c) ज्याची प्रत्येक कडा 9 सें.मी. लांबीची आहे अशा लाकडाच्या घनाकृती ठोकळ्याची प्रत्येक कडा 3 सें.मी. लांबीची असेल असे घनाकृती ठोकळे करण्यासाठी मूळची घनाकृती कमीत कमी किती वेळा कापावी लागेल?

(d) दोन आगगाड्यांपैकी एक A या ठिकाणाहून B या ठिकाणाकडे जाण्यासाठी व दुसरी B या ठिकाणाहून A ठिकाणाकडे जाण्यासाठी सकाळी 6 वाजता निघतात. पहिली गाडी आपला प्रवास 8 तासांत पुरा करते व दुसऱ्या गाडीला आपला प्रवास पुरा करण्यास 12 तास लागतात, तर त्या दोन गाड्यांची गाठ किती वाजता पडेल?

(e) एक आगबोट एका नदीच्या किनाऱ्यावरील A आणि B या दोन बंदरांमध्ये उतारूंची वाहतूक करते. A बंदराहून B बंदराकडे जाण्यास तिला 6 तास लागतात व परतीच्या प्रवासाला 9 तास लागतात. तर A बंदरात नदीत टाकलेल्या लाकडाच्या ओंडक्याला B या बंदराला जाण्यासाठी किती वेळ लागेल?

(f) सहलीला गेलेल्या मुलांना प्रत्येकी तीन केळी दिली, तर शेवटच्या मुलाला देण्यासाठी दोनच केळी उरतात. प्रत्येक मुलाला दोन केळी दिली असती, तर आठ केळी उरली असती, तर किती केळी नेली होती?

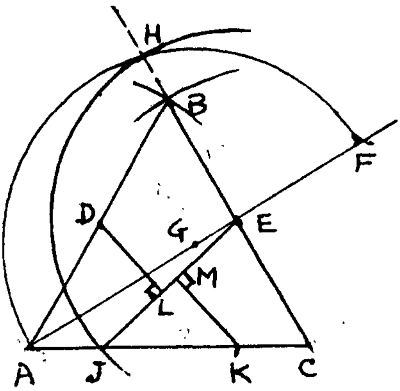
23. आरास

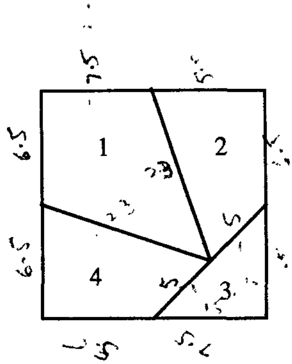
गोकुळ अष्टमी (कालाष्टमी) झाली. 'जगन्मित्र सहकारी निवास' संस्थेच्या सर्व तरुण रहिवाशांनी दहिकाला मोठ्या उत्साहात पार पाडला. आता गणपती उत्सव दहा दिवसांवर येऊन ठेपला. त्या सहकारी निवासात दीडशे फ्लॅट्स होते. शिवाय, सभा, संमेलने, सांस्कृतिक इत्यादी कार्यक्रमांसाठी मोठा हॉलही होता. या हॉलमध्येच गजाननाची प्रतिष्ठापना होत असे. दहा दिवस निरनिराळे कार्यक्रम – चर्चासत्रे, व्याख्याने, जादूचे प्रयोग, वगैरेंसारख्या कार्यक्रमांनी विघ्नहर्त्याची सेवा होत असे. एक दिवस स्थानिक कलाकारांसाठी (local talent) असे.

गणपतीची स्थापना एका सुशोभित मखरात करीत असत. या वर्षी मखराची आरास करण्याची जबाबदारी स्थापत्यविशारद विद्याधरकडे सोपविली होती. मखराची आरास नव्या पद्धतीने करावयाची, असे त्याने ठरविले. आपली मखराची योजना उत्सव समितीपुढे मांडून समितीची संमती मिळवली होती.

आज भाद्रपद शुद्ध द्वितीया. मखराचे काम जवळजवळ पूर्ण होत आले होते. मखराच्या मागच्या बाजूला मखमली कापड लावायचे शिल्लक राहिले होते; पण सजावटीसाठी जी रक्कम ठरली होती ती बहुतेक संपली होती. मखमलीचा एक समभुज त्रिकोणाकृती तुकडा फक्त उरला होता. त्या तुकड्याचा चौरसाकृती आकार कसा बनविता येईल, या विचाराने विद्याधरचे डोके सुन्न झाले होते. हाताशी फक्त एक दिवस उरला होता. त्या तुकड्याचे क्षेत्रफळ व मखराच्या मागच्या बाजूचे क्षेत्रफळ दोन्ही सारखी आहेत, हा मुद्दा त्याला फायदेशीर वाटला. सर्व रात्रभर जागावे लागले तरी चालेल, पण त्या त्रिकोणी कापडाचे कमीत कमी तुकडे करून ते वॉलपेपरवर चिकटवून मागची बाजू भरून काढायची असा निश्चय करून तो कामाला लागला. त्याने ते तुकडे करण्यासाठी खाली दाखवल्याप्रमाणे रचना केली व सोबत दाखवलेले चार तुकडे एकमेकांना शिताफीने जोडले. तुकड्यांच्या जोडलेल्या कडा दिसू नयेत म्हणून सोनेरी कलाबूत त्यावर चिकटविली. 'वाः', तो स्वतःशीच म्हणाला, 'मॉडर्न आर्टचे

एक आकर्षक डिझाइनही तयार झालं की!' त्याच्या या कलाकृतीवर त्याचे मित्र बेहद्द खूष झाले.





समभुज त्रिकोणी कापडाचे चार तुकडे विद्याधरने कसे केले ते पाहा. वरील डावीकडील आकृती पाहा.

Δ ABC हा समभुज त्रिकोण आहे. D व E अनुक्रमे AB व AC या बाजूंचे मध्यबिंदू स्थापा. AE ही मध्यगा F बिंदूपर्यंत अशी वाढवा की, EF = EB होईल. रेख AF चा मध्यबिंदू G स्थापा. रेख AF वर अर्धवर्तुळ काढा. बाजू CB वाढवा. ती त्या अर्धवर्तुळाला छेदते त्या बिंदूला H हे नाव द्या. E हा केंद्रबिंदू आणि EH एवढी त्रिज्या घेऊन AC ला J बिंदूत छेदणारा वर्तुळ कंस काढा. CB वर K हा बिंदू असा घ्या की, JK = EB होईल. बिंदू J व E जोडून रेख JE वर KM आणि DL हे लंबरेख काढा. म्हणजे Δ ABC चे चार तुकडे असे होतील; (1) □ BELD, (2) □ DLJA, (3) Δ MJK आणि (4) □ ECKM. हे चार तुकडे जोडून चौरस कसा तयार होतो, ते वर उजवीकडील आकृतीत दाखवले आहे.

24. बुद्धीचे बळ

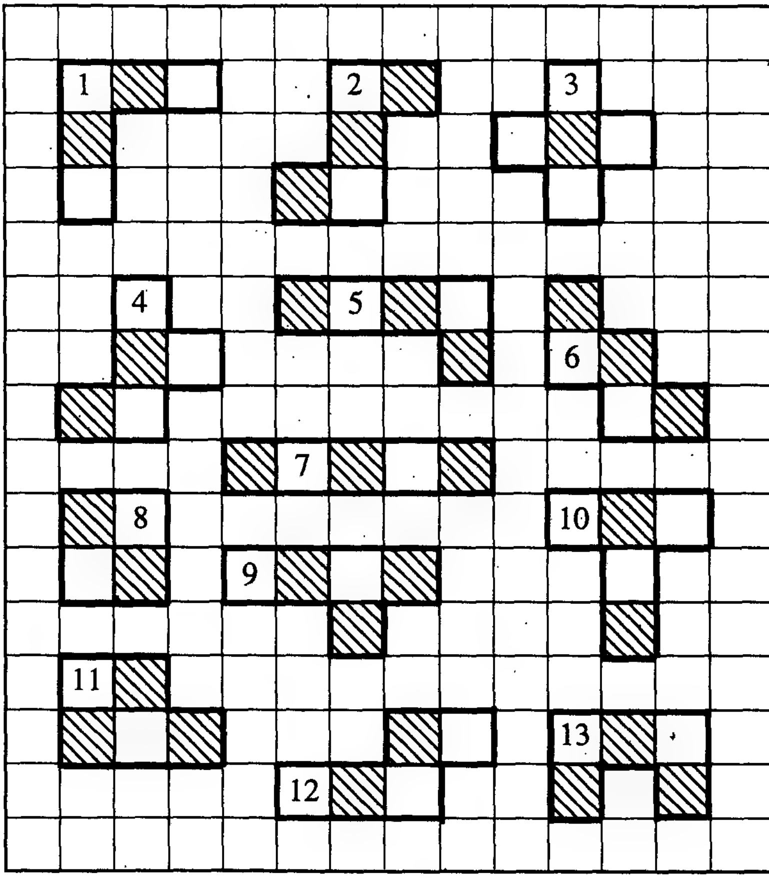
संजय आणि विजय या जीवश्चकंठश्च मित्रांना बुद्धिबळाचा फारच षोक! शनिवारचा अर्धा दिवस आणि रविवारचा संपूर्ण दिवस दोघांचे बुद्धिबळाचे डाव चालायचे. त्या छंदात ते तहानभूकही विसरायचे. खेळाचा अड्डा कधी संजयच्या घरी, तर कधी विजयच्या घरी. दोघांच्या सौभाग्यवती शनिवार-रविवार आले की अगदी केविलवाण्या व्हायच्या. प्रथम प्रथम त्या आपल्या पतिराजांवर चिडायच्या, त्यांच्याशी भांडायच्या; पण पुढेपुढे त्यांना आपल्या पतिराजांच्या या वेडाची सवय झाली. शेवटी त्यांनी ठरविले की, जिच्या घरी खेळाचा अड्डा असेल तिच्या घरी दुसरीने शनिवार-रविवार मजेत घालवायचे.

संजय आणि विजय जरी बुद्धिबळाचे वेडे होते, तरी दोघेही कडक माथ्याचे होते. दोन-तीन डाव झाले की त्यांच्यामध्ये भांडाभांड सुरू व्हायची. कारण तसे काही महत्त्वाचे नसायचे. अगदी क्षुल्लक कारणावरून दोघांची जुंपायची. 'तू वजिरावर बोट ठेवून हलवलास मात्र घोडा', 'अर्धा अर्धा तास तूच घेतोस एक चाल करायला,' 'संज्या, लेका, तुला कितीदा सांगितलं आहे की वेफर्स आणून ठेवीत जा म्हणून. तोंड चाळवायला तुझे ते खारे दाणे नकोत. लगेच कफ होतो,' इत्यादी.

कधीकधी दोघांचे वादविवाद एवढे हमरीतुमरीवर यायचे की, यापुढे एकमेकांशी बुद्धिबळ खेळायचे नाही, अशा भीष्मप्रतिज्ञा व्हायच्या! दोन-तीन तासांनी त्या मोडायच्या!

एका शनिवारी काय झाले, संजयचे नशीबच त्याला साथ देईना. त्या दिवशी त्याला काय झाले होते कुणास ठाऊक! त्याचे डोकेच चालेना त्या दिवशी! लागोपाठ तीन डाव तो हरला. पुढच्या डावात त्याचा वजीर गेला. त्यामुळे तो इतका संतापला की, त्याने बुद्धिबळाचा पटच भिरकावून दिला; पण तो प्लॅस्टिकचा असल्यामुळे त्याचे तुकडेतुकडे झाले. 'दिलके टुकडे हजार हुए, कोई यहाँ गिरा कोई वहाँ गिरा'. हजार तुकडे जरी झाले नाहीत तरी तीन-तेरा झाले. सुदैव एवढेच की ते तुकडे वाकडेतिकडे न होता खालील आकृतीत

दाखविल्याप्रमाणे, जणू काही मुद्दाम केल्यासारखे नीटनीटके झाले.



बुद्धिबळाच्या पटात 64 घरे असतात, हे सर्वांना माहीत आहे. ही घरे आलटून पालटून पांढरी-काळी असतात. पाच-पाच घरे असलेले 12 तुकडे आणि चार घरांचा एक चौरस तुकडा, असे तेरा तुकडे झालेले होते.

संतापाच्या भरात आपण हे काय केले, असा संजयला पश्चात्ताप झाला. तो विजयला म्हणाला, "मला फार वाईट वाटतं. माझा तोल गेला व इतक्या वर्षांचा आपला आवडता पट मी मोडून टाकला."

समजावणीच्या सुरात विजय त्याला म्हणाला, "अरे, इतकं काय, मनाला लावून घेतोस? बुद्धिबळाचा पट तो काय? दुसरा आणू."

"तसं नव्हे रे! तू उद्या दहा पट घेऊन येशील! पण ह्या पटावर आपण

इतकी वर्षं खेळलो, भांडलो, एकमेकांना हवं तसं नको ते बोललो; पण पुन्हा एकत्र आलो. या पटाचं व माझं अतूट नातं जमल्यासारखं झालं होतं.''

''इतकंच ना? मग हाच पट ते तुकडे एकमेकांना जोडून पुन्हा बनवू. मागच्या बाजूला जाड कार्डाचा कागद चिकटवू. तो कसा जोडायचा हा एक नवीन खेळच होईल.''

संजयला ही कल्पना पसंत पडली. त्यांनी ते सर्व तुकडे जमा केले व ते एकत्र जोडण्याचे प्रयत्न चालू केले. शनिवारी रात्री ते सुखासमाधानाने जेवले. सौभाग्यवतींशी गप्पा मारीत एकमेकांची चेष्टामस्करी करीत त्यांनी तासभर घालविला. मग ते पटाची जुळवाजुळवी करू लागले. रात्री बाराच्या ठोक्याला त्यांनी तो पट कसा जुळवायचा हे निश्चित केले आणि फेव्हिबाँडची मलमपट्टी करून रविवारसाठी तयार व्हावा म्हणून दडपणाखाली सुकत ठेवला.

त्यांनी तो फुटलेला पट कसा जोडला असेल?

साधारण ज़ाडशा कार्डावर एक बुद्धिबळाचा पट आखून काढा. दुसऱ्या एका कार्डावर वरील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे तुकडे काढून घ्या व कापा. नंतर ते पहिल्या कार्डावरील पटावर बसविण्याचा प्रयत्न करा.

25. द्वैत-अद्वैत

पुष्कळांची अशी समजूत असते की, गणित म्हणजे आकडेमोड. फार तर अव्यक्ताची किंमत काढण्यासाठी समीकरणे सोडवायाची; पण गणितशास्त्राच्या काही शाखा अशा आहेत की, त्यांमध्ये संख्यांचा समावेशच नसतो. युक्लिडीय भूमितीत संख्यांचा वापर नाहीच. तो एक तर्कनिष्ठ खेळ आहे. आधुनिक गणितात 'संस्थिती भूमिती' (topology) नावाची शाखा उदयास आली आहे. या शाखेत वस्तूंच्या मोजमापासारख्या क्रिया अजिबात नाहीत. वस्तूंचा आकार किंवा आकारमान (क्षेत्रफळ, घनफळ) बदलली तरी त्या वस्तूंचे जे अंगभूत गुणधर्म असतात त्यांपैकी जे बदलत नाहीत व जे बदलतात अशा बाबींचा अभ्यास या शाखेत करतात. वस्तूमध्ये बदल झाल्यावर पुष्कळ बाबी बदलतात. उदाहरणार्थ – पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ, वस्तूवरील दोन बिंदूंमधील अंतरे इत्यादी बदलणाऱ्या बाबी आहेत.

कागद अगर कापडाचा तुकडा घेतला, तर त्याला दोन अंगे असतात. प्रिंटेड साडीची आतली बाजू आणि बाहेरची बाजू असा भेदाभेद आपण व्यवहारात करतो. गणिताच्या भाषेत बोलायचे झाले तर असे : कागद कितीही पातळ असला किंवा कापड कितीही तलम असले, तरी त्यांना **दोन पृष्ठभाग** असतात. म्हणजे आपण द्वैतात वावरत असतो.

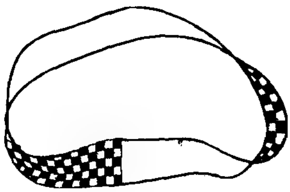
कागदाची एक साधारण लांब अशी पट्टी किंवा कापडाची फीत किंवा रिबन घेतली व तिच्या लांबीकडील दोन्ही टोकांचे भाग एकमेकांना चिकटविले; एक एक वर्तुळाकृती कड्यासारखी वस्तू तयार होईल. तिलाही बाहेरचा आणि आतला असे दोन पृष्ठभाग असतील; तसेच तिला दोन कडा असतील. एका पृष्ठभागावरील एखाद्या बिंदूपासून दुसऱ्या भागावरील बिंदूपर्यंत जाण्यासाठी त्या पट्टीची कोणतीतरी कडा ओलांडावी लागेल. येथे असा प्रश्न उपस्थित करता येईल की, अशी वस्तू अस्तित्वात असेल का की जिला एकच पृष्ठभाग असेल?

म्हणजे तुम्ही गणित सोडून अध्यात्माकडे वळलात की!

असे का बरे म्हणता? अध्यात्म हा मानवाच्या बुद्धीचा विलास आहे.

गणितशास्त्रसुद्धा मानवानेच आपल्या व्यवहाराच्या सोयीसाठी निर्माण केले. अध्यात्मात द्वैताकडून अद्वैताकडे जाण्याचा खटाटोप असतो ना? गणितात तसा प्रयत्न नसल्यासच आश्चर्य!

दोन पृष्ठभाग व दोन कडा असलेल्या कागदाच्या पट्टीच्या एका टोकाला अर्धा वळसा द्या. (अध्यात्मातही मनाला साधा वळसा नव्हे, तर झटका द्यावा लागतो) आणि ते टोक दुसऱ्या टोकाला चिकटवा. मग जी वस्तू तयार होईल ती साध्या कड्यापेक्षा निराळी वस्तू असेल. तिला **एकच पृष्ठभाग** असेल.

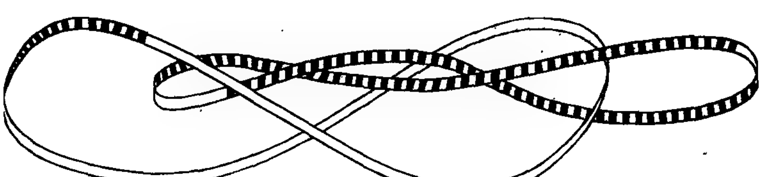


एवढे काय झाले दचकायला? एकाच पृष्ठभागाने काम नाही भागत? (डोके गरगरायला लागले?) स्वतः अशी कागदाची पट्टी-दोन/तीन सेंटिमीटर रुंद व साधारण पंचवीस सेंटिमीटर लांब घ्या आणि अनुभव घ्या. **एकाच पृष्ठभागाबरोबर तिला एकच कडा असेल.** विश्वास नाही ना बसत? मग सांगतो ते करून पाहा. अर्धा वळसा एका टोकाला देऊन ते टोक दुसऱ्या टोकाला जोडून तयार केलेली नवी वस्तू घ्या. तिच्यावर एक बिंदू स्थापा व पेन्सिलीने रेघ मारीत चला. थोड्याच वेळात कडा ओलांडल्याशिवाय मुळच्या बिंदूशी येऊन ठेपाल. आला का एकाच पृष्ठाचा अनुभव? आता एकाच कडेचा अनुभव घ्या. त्यासाठी कडेवर चांगली दिसेल अशी एका ठिकाणी शाईने खूण करा व तेथून कडेवरून बोट फिरवा. पुन्हा त्याच खुणेशी याल. द्वैताकडून अद्वैताकडे! असाच हा प्रकार नाही का?

या एकपृष्ठी कड्याला मोबिअस बँड किंवा स्ट्रिप (Mobious Band/ Strip) म्हणतात.

कागदाच्या पट्टीची दोन्ही टोके वळसा न देता एकमेकांना चिकटविली, तर

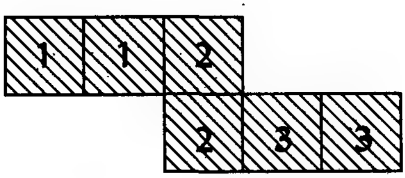




होणारे कडे (ring) त्याच्या रुंदीच्या मध्यावर कापत गेले, तर निम्म्या रुंदीची दोन कडी मिळतील; पण मोबिअस पट्टीचे कडे मध्यावर कापले, तर निम्म्या रुंदीचे; पण दुप्पट लांबीचे मोबिअस कडे तयार होईल. मात्र त्याला दोन वळसे असतील. हे दोन वळसे असलेले मोबिअस कडे त्याच्या रुंदीच्या मध्यावर कापले, तर दोन सुटी कडी मिळतील. वरच्या आकृत्या पाहा. अद्वैताकडून पुन्हा द्वैताकडे ?

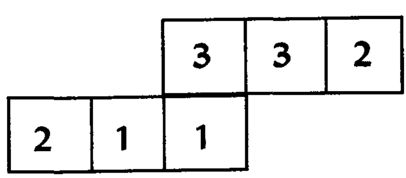
26. त्रिगुणात्मक त्रैमूर्ती

संस्थिती भूमितीत द्वैताकडून अद्वैताकडे कसे जाता येते, हे आपण मागच्या पाठात पाहिले. कागदाच्या पट्टीला जी दोन अंगे (पृष्ठभाग surfaces) असतात त्यांमधून एकच पृष्ठभाग असणारी मोबिअस पट्टी कशी तयार करता येते हे समजून घेतले. अशीच काहीशी युक्ती करून एकाच कागदाच्या तुकड्यातून तीन पृष्ठभाग असणारी आकृती करता येईल का, असा प्रश्न कोणी उपस्थित केला, तर 'काय वेडा आहे?' अशी बोळवण करून चालणार नाही. त्याच्या प्रश्नाला होकारार्थी उत्तर देऊन तशी आकृती करण्याची कृती त्याला समजावून देण्याचा प्रयत्न करू. प्रयत्नांती नराचा नारायण होऊ शकतो. तशीच एकगुणात्मक कागदाच्या पट्टीतून त्रिगुणात्मक त्रैमूर्तीचा अनुभव देऊ.

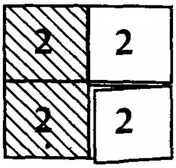


सहा सें.मी. रुंदीची व पंधरा सें.मी. लांबीची कागदाची एक पट्टी घ्या. कागदाच्या दोन्ही अंगांना तीन से.मी. बाजूचे चौरस आखून घ्या. त्या पट्टीचे, आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे, डावीकडील खालचे दोन चौरस व उजवीकडील वरचे दोन चौरस कापून टाका. राहिलेल्या चौरसांमध्ये आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे 1,2,3 हे क्रमांक लिहा.

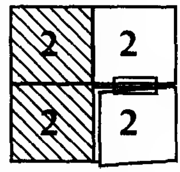
आता ती पट्टी उलटी करा म्हणजे डाव्या बाजूचे वरचे दोन चौरस कापलेले आहेत, अशी करा. त्या बाजूला असलेल्या चौरसांत सोबत दाखवल्याप्रमाणे अंक लिहा.



नंतर पट्टी वरील पहिल्या आकृतीप्रमाणे आपल्या समोर धरून डाव्या बाजूचे वरचे दोन चौरस मागच्या बाजूला जातील



अशी घडी घाला आणि उजव्या बाजूला 3, 3 हे क्रमांक असलेल्या चौरसांमध्ये कागद दुमडून टोकाचा 3 क्रमांकाचा चौरस डाव्या बाजूच्या 3 क्रमांकाच्या चौरसावर येईल (अर्थात मागील बाजूला जाईल) अशी घडी घाला. म्हणजे घड्या घातलेला कागद सोबत दाखवलेल्या आकृतीप्रमाणे दिसेल.

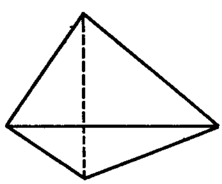


नंतर घड्या सपाट होतील, अशा रीतीने बोटाने दाबा. उजव्या बाजूला असलेल्या दोन चौरसांच्या दरम्यान सोबतच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे लहानशी सेलोटेप चिकटवा. म्हणजे तीन अंगे असलेली आकृती तयार होईल. आपल्या समोर त्या आकृतीचे 2 क्रमांकाचे अंग आहे. (उजवीकडील आकृती पाहा). मागील बाजूस क्रमांक 1 चे अंग दिसेल.

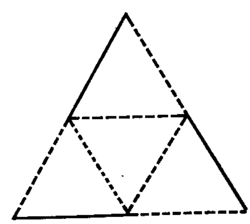
आता क्रमांक 2 चे अंग आपणासमोर ठेवून मध्यावर उभी घडी अशा तऱ्हेने घाला की, उजव्या बाजूचा भाग मागच्या बाजूला जाईल. नंतर वरचा भाग उजवीकडून उघडा करा म्हणजे त्या आकृतीचे क्रमांक 3 चे अंग दिसेल.

27. सुसम चतुःपृष्ठक - रंगकाम

वर्गात भूमितीचा तास चाललेला होता. भूमितीचा तास म्हटला की, अर्ध्या वर्गाचे डोळे मिटायला सुरवात व्हायची. त्यात आणखी भर म्हणजे त्रैमितिक भूमिती. मग काय विचारायला हवे? कोणी आढ्याकडे पाहतो आहे, तर कोणी खिडकीतून बाहेरच्या सृष्टिसौंदर्याचा आस्वाद घेतो आहे, तर कोणी अचानक डोकेदुखी उत्पन्न झाल्याप्रमाणे दोन्ही हातांनी डोके घट्ट धरून बसला आहे, अर्धा वर्ग पेंगू लागला आहे. ही परिस्थिती शिक्षकांच्या ध्यानात आली. म्हणून सुसम चतुःपृष्ठकाच्या (regular tetrahedron) गुणधर्मांमध्ये न शिरता शिक्षकांनी विषयाला थोडी कलाटणी दिली. गणिताच्या या शिक्षकांची अशी ख्याती होती की, त्यांच्या तासाला विद्यार्थ्यांना कधी कंटाळा येत नसे. त्यांनी नव्याने सुरुवात केली ती अशी :



सुसम चतुःपृष्ठक म्हणजे काय याची सर्वांना कल्पना आली असेलच, असे म्हणून त्यांनी सुसम चतुःपृष्ठकाची एक लाकडी प्रतिकृती टेबलावर ठेवली. याची चारही पृष्ठे एकरूप समभुज त्रिकोण असतात. या चतुःपृष्ठकाला त्याच्या तिरप्या उभ्या कडांवर कापून आडवा केला, तर त्याची परिस्थिती फळ्यावर काढीत असलेल्या आकृतीप्रमाणे होईल.



आपल्याला माहीत आहे की, सूर्याचा प्रकाश त्रिकोणी लोलकातून आरपार जाऊ दिला की, त्याचे सात रंगांत विभाजन होते. आता आपणापुढे असा प्रश्न आहे की, या सात रंगांपैकी कोणतेही चार रंग निवडले व खालील अटी पाळून हा चतुःपृष्ठक बाहेरून रंगविला, तर निरनिराळ्या किती प्रकारांनी तो रंगविता येईल?

अटी : (1) प्रत्येक पृष्ठ पूर्णतः एकाच रंगाने रंगवायचे.

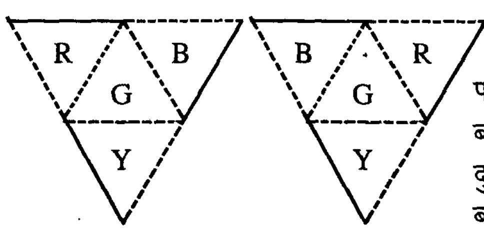
(2) कोणतेही पृष्ठ रंगविल्याविना राहता कामा नये.

(3) निरनिराळे प्रकार मोजताना चतुःपृष्ठकाचे एका रंगाने रंगविलेले पृष्ठ तळाला अगर कोणत्याही बाजूला असले, तरी तो एकच प्रकार धरायचा. मात्र उभ्या बाजूंचे रंग विचारात घेताना डावीकडून व उजवीकडून रंगांचे क्रम निरनिराळे होतील. म्हणून ते दोन प्रकार निरनिराळे धरायचे. शिवाय, सर्व पृष्ठे एकाच रंगाने रंगविता येतील, किंवा दोन पृष्ठे एका रंगात व राहिलेली दुसऱ्या एका रंगात किंवा दोन रंगांत रंगविता येतील. तीन पृष्ठे एकाच रंगात व चौथे निराळ्या रंगात रंगविता येईल.

प्रश्न तसा जटिल खराच; पण या प्रश्नाने सर्वांची झोप उडवली, सर्व वर्ग खडबडून जागा होऊन विचार करू लागला; पण कोणीही उत्तर देऊ शकला नाही. तास संपला तेव्हा शिक्षक म्हणाले, "पुढचा तास आणखी दोन दिवसांनी आहे. तोपर्यंत या प्रश्नावर विचार करून त्याची उकल तयार करून आणा."

वर्गात चार विद्यार्थी असे होते की, ते अशा आव्हानांना नेहमीच तोंड देत. चौघेही एकत्र बसून विचारविनिमय, चर्चा करून दिलेल्या वेळात प्रश्नाची उकल करण्यात यशस्वी होत. या वेळीही तसेच घडले. पुढच्या तासाला शिक्षक वर्गात आल्याबरोबर, शिक्षकांनी उकलीविषयी विचारण्यापूर्वीच चौघांनी जाहीर केले की, गेल्या वेळचा प्रश्न आम्ही आमच्या मतीप्रमाणे सोडवला आहे. आमची उकल चूक की बरोबर त्याचा निर्णय सरांनी करावा. त्यांचा मुख्य विद्यालंकार याने उकल सांगावयास सुरुवात केली.

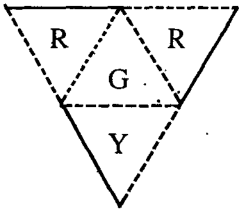
सात रंगांपैकी चार रंगः तांबडा (R), निळा (B), हिरवा (G), आणि पिवळा (Y) निवडले असे समजा. हे चार रंग वापरले तर ते दोन प्रकारांनी निवडता येतील.



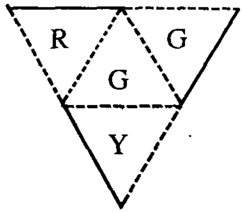
पहिला प्रकार –
बाजूंच्या पृष्ठांचा रंगक्रम YBR
दुसरा प्रकार –
बाजूंच्या पृष्ठांचा रंगक्रम YRB

प्रकार 1 **प्रकार 2**

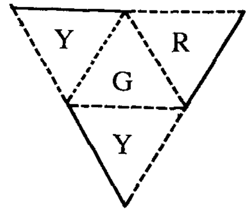
सात रंगांपैकी चारांऐवजी तीनच रंग निवडले – समजा, तांबडा (R), हिरवा (G), आणि पिवळा (Y), तर त्या तीन रंगांनी चतुःपृष्ठक रंगविण्याचे खाली दाखवल्याप्रमाणे तीन प्रकार होतील.



प्रकार 1 :
रंगांचा क्रम RRY



प्रकार 2 :
रंगांचा क्रम GRY



प्रकार 3 :
रंगांचा क्रम RYY

उकलीची दिशा तुमच्या समोर मांडली आहे. सातांपैकी दोनच रंग वापरले किंवा एकच रंग वापरला, तर प्रत्येकी किती प्रकार होतील या बाबींचा विचार करावा लागेल. एवढे झाल्यावर सातांपैकी चार रंग निवडण्याच्या शक्यता किती, तीन रंग निवडण्याच्या किती, दोहोंच्या किती व एकाच्या किती? ही बाबसुद्धा विचारात घ्यावी लागेल.

वर दिलेल्या मार्गदर्शक सूचनांचा वापर करून प्रश्नाची संपूर्ण उकल काढण्याचा तुम्ही प्रयत्न करावा.

उत्तरे

1. ABC आणि BAC

A = 1, 2 किंवा 3. A × C = A असल्यामुळे A हा अंक 1 असणार नाही. A = 3 असल्यास C = 1 असला पाहिजे; पण हे अशक्य, कारण C > A. म्हणून A = 2 व त्यामुळे C = 6.

तिसऱ्या पोटगुणाकारावरून 6 × B हा गुणाकार दोन अंकी व त्याचा एकक स्थानचा अंक B पाहिजे. दहं स्थानचा अंक x असेल, तर 6 × B = 10x + B. म्हणून B = 2x. त्यामुळे B हा अंक सम असून, तो 4 किंवा 8 यांपैकी असला पाहिजे.

जर B = 4 असेल, तर ABC = 246 व त्या संख्येला 4 ने गुणल्यास तिसरा पोटगुणाकार चार अंकी न येता तीन अंकीच येईल. म्हणून B = 8. म्हणून, A = 2, B = 8, व C = 6 या किमती निश्चित होतात.

2. हॅपी बर्थ डे

आपण, इच्छुकाच्या जन्मतारखेशी संबंध नसलेली 3 ही आगंतुक संख्या प्रथम मिळवावयास सांगतो. त्याच संख्येत आपली जादू भरलेली आहे.

प्रथम मिळविलेली आगंतुक संख्या	3
5 ने गुणल्यामुळे तिचे होतात	15
नंतर 20 ने गुणल्यामुळे होतात	300
पुन्हा 3 मिळविल्यामुळे होतात	303
5 ने गुणल्यामुळे होतात	1515

जन्मतारखेशी संबंधित असलेल्या संख्यांवर केलेल्या वरील क्रियांमुळे मिळणाऱ्या संख्येपेक्षा 1515 या आगंतुक संख्येची भर पडते.

[**टीप :** शेवटी आपणास सांगण्यात आलेली संख्या एकतर पाच अंकी असेल, नाहीतर सहा अंकी असेल.]

3. लफंगे

आदल्या दिवशी नेलेली साडी दुसऱ्या दिवशी परत केली. म्हणजे नऊशेच्या साडीपोटी दुकानदाराला आदल्या दिवशी दिलेले साडेचारशेच मिळाले.

4. नऊ पत्त्यांची जादू

अलकाने X ठिपक्यांचा, दिनूने Y ठिपक्यांचा व गीताने Z ठिपक्यांचा असे पत्ते काढले होते, असे समजू.

मग अलकाला सांगितलेल्या क्रिया तिने केल्यावर येणारी संख्या $10x + 5$ अशी होईल. ही संख्या घेऊन दिनूने त्याला सांगितलेल्या क्रिया केल्यावर येणारी संख्या $100x + 10y + 55$ ही होईल. शेवटी गीताने सांगितलेली संख्या $1000x + 100y + 10z + 555$ ही असेल.

म्हणून, $1000x + 100y + 10z + 555 = 4165$

म्हणजे $1000x + 100y + 10z = 3610$

म्हणून 10 ने भागून $100x + 10y + z = 361$.

म्हणून $x = 3, \quad y = 6, \quad z = 1$.

वरील विवेचनावरून असे दिसून येईल की, काढलेल्या पत्त्यांवरील ठिपक्यांच्या संख्यांशी संबंधित नसलेली 1 ही संख्या विकासची जादूची संख्या होती व तिच्यामुळे शेवटच्या संख्येत 555 ही संख्या जास्त आली. तीच विकासने 4165 मधून तोंडी वजा केली व 3610 मधील पहिल्या तीन अंकांएवढे ठिपके असलेले पत्ते कोणते ते सांगितले.

दोनच प्रेक्षकांनी पत्ते काढले असते, तर शेवटी $100x + 10y + 55$ (वर पाहा, ही संख्या आलेली आहे) ही संख्या येईल. म्हणजे 55 ही जादा असलेली संख्या व ती सांगितलेल्या संख्येतून वजा केल्यावर उत्तर मिळते. चार प्रेक्षकांनी पत्ते काढले, तर काय करावयाचे हे आता तुम्हाला सांगता येईल.

5. संख्यांचा एक खेळ

7, 11 व 13 यांचा गुणाकार 1001 येतो. कोणत्याही तीन अंकी संख्येला 1001 ने गुणल्यास तेच अंक पुढे घेऊन होणारी सहा अंकी संख्या मिळते. भागाकार ही गुणाकाराची विरुद्ध क्रिया असल्यामुळे, वरील सारख्या सहा अंकी संख्येला क्रमशः 7, 11 व 13 ने म्हणजेच त्यांच्या गुणाकाराने

भागल्यावर भागाकार अर्थातच मूळची तीन अंकी संख्या येईल.

6. चोरी! चोरी!!

तयार केलेल्या चार आकृत्या काटेकोरपणे कापलेल्या असतील, तर त्या जोडून आयत बनविण्याचा प्रयत्न करताना त्यांच्या दरम्यान अत्यंत चिंचोळी समांतरभुज चौकोनाकृती जागा शिल्लक राहते, असे आढळून येईल. त्या आकृतीचे क्षेत्रफळ 1 चौरस एकक असेल. वरवर जोडणी केल्यास ही फट लक्षात येत नाही. मोठ्या आकाराच्या आकृत्या कापून घेतल्यास मोकळी जागा नजरेत भरेल.

7. एक पैज

शंभूला 400 पावले चालावयाचे आहे,
तर गंपूला 2 + 4 + 6 + --- + 40 = 420 पावले चालावे लागेल.
म्हणून शंभूने पैज जिंकली.

8. चकत्यांचा खेळ

सुरुवातीला दिलेल्या चौरसाच्या एका स्तंभातील संख्या लक्षात ठेवा व त्या एका ओळीत येतील अशा तऱ्हेने चकत्या फिरवा. उदा. : पहिल्याच स्तंभातील 3, 6, 14, 17, 25 या संख्या लक्षात ठेवा. त्यांच्यामध्ये एक प्रकारचा आकृतिबंध (Pattern) आहे. अर्थात, या संख्या क्रमाने चकत्यांवर असतील असे नाही.

9. तीन तेरा!

(1) 15. (2) II, IV, V व VII
(3) तिची संख्या तिसऱ्या स्तंभातही आहे; पण तो स्तंभ तिने सांगितला नाही.

10. नाण्याच्या दोन बाजू

1) (a) फक्त पंचवीस पैशांच्या नाण्याचा. (b) पन्नास व पाच पैशांच्या नाण्यांचे. (c) रुपया, पंचवीस पैसे, वीस पैसे व पाच पैशांच्या नाण्यांचे. (d) रुपया, पन्नास पैसे, वीस पैसे व पाच पैशांच्या नाण्यांचे.
2) (a) 28. (b) 54.

1'1. प्रश्नपंढरी

1) अशा प्रकारच्या प्रश्नांची उकल करताना दिलेल्या माहितीतील शेवटच्या पायरीपासून सुरुवातीच्या पायरीकडे येणे सोयीचे ठरते. शेवटी एकूण नफा 4,80,000 रु. झाला. त्यापूर्वी 7,20,000 रु. खर्च केले होते. म्हणजे तिसऱ्या देशाला औषधे विकून 12,00,000 रु. आले. ही रक्कम खरेदीच्या चौपट होती. म्हणून दुसऱ्या देशाकडून आलेली रक्कम [(12,00,000 ÷ 4) + खर्च, 5,40,000] = 8,40,000 रु. होती. ही रक्कम खरेदीच्या तिप्पट होती. म्हणून पहिल्या देशाकडून मिळालेली रक्कम [(8,40,000 ÷ 3) + खर्च 3,00,000] = 5,80,000 रु. होती. ही उत्पादन खर्चाच्या दुप्पट असल्यामुळे पहिल्या देशाला विकलेल्या मालाचा उत्पादन खर्च 5,80,000 ÷ 2 = 2,90,000 रु. होता.

2) नोकराचा वार्षिक पगार 12,000 रु. असल्यामुळे संबंधित वर्षात काम केलेल्या सात महिन्यांचा पगार 7,000 रु. द्यावयास हवा होता; पण कपडे वर्षाच्या सुरुवातीला दिले असल्यामुळे कपड्यांच्या किमतीचा त्या वर्षातील पाच महिन्यांचा हिस्सा कापून घेणे भाग होते, तो हिस्सा (7,000 − 6,500) = 500 रु. झाला. (म्हणजे पगारापैकी 500 कमी दिले.) म्हणून कपड्यांची किंमत 500 × 12/5 = 1,200 रु. होती.

3) (5 मेंढ्यांची किंमत) + (80 रु.) = 64 मेंढ्यांवरील कर.....(I)
तसेच, (2 मेंढ्यांची किंमत) - (80 रु.) = 20 मेंढ्यांवरील कर.....(II)
म्हणून बेरीज करून, 7 मेंढ्यांची किंमत = 84 मेंढ्यांवरील कर.
म्हणजे, एका मेंढीची किंमत = 12 मेंढ्यांवरील कर.....(III)
म्हणून समीकरण (I) वरून, (5 × 12) मेंढ्यांवरील कर + 80 रु. = 64 मेंढ्यांवरील कर.
म्हणून 4 मेंढ्यांवरील कर 80 रु. म्हणजेच, एका मेंढीवरील कर 20 रु. समीकरण (III) वरून एका मेंढीची किंमत = 12 × 20 = 240 रु.

4) खेचराच्या पहिल्या मुद्द्यानुसार दोघांवर मिळून लादलेल्या गोणींच्या संख्येला 3 ने भाग गेला पाहिजे. दुसऱ्या मुद्द्याप्रमाणे एकूण गोणींच्या संख्येला 2 ने भाग गेला पाहिजे व दोघांच्या पाठीवर लादलेल्या

गोणींच्या संख्येमध्ये 2 चा फरक असला पाहिजे. 2 व 3 या दोहोंनी भाग जाणारी लहानांत लहान संख्या 6. तेवढ्या गोणी दोघांच्या मिळून पाठीवर असत्या, तर गाढवाच्या पाठीवर 2 व खेचराच्या पाठीवर 4 गोणी असत्या; पण त्यामुळे पहिल्या मुद्द्याला बाध येतो. म्हणून 2 व 3 या दोहोंनी भाग जाणाऱ्या पुढल्या 12 या संख्येचा विचार केला, तर गाढवाच्या पाठीवर 5 व खेचराच्या पाठीवर 7 गोणी होतील व या दोन्ही संख्यांनी दोन्ही मुद्दे खरे होतील.

2 व 3 ने भाग जाणाऱ्या पुढच्या 18, 24, ... इत्यादी संख्यांनी पहिला मुद्दा खरा होणार नाही.

5) तार्किकदृष्ट्या या प्रश्नाची अनेक उत्तरे संभवतात; पण वड्यांची संख्या फार मोठी असणार नाही, असे गृहीत धरून उत्तर काढू.
पहिली तीन मुले व नऊ मित्र मिळून एकूण 12 मुले झाली. सर्वांच्या वाट्याला सारख्या वड्या आल्या. त्यामुळे तिघांकडील एकूण वड्यांच्या संख्येला 12 ने भाग गेला पाहिजे. एकूण वड्या 12 च असत्या, तर प्रत्येकाकडे 4 वड्या असत्या व नऊ मित्रांना निदान एकेक तरी वाटण्यासाठी त्या अपुऱ्या पडल्या असत्या. तीच गत एकूण 24 वड्यांची झाली असती. म्हणून 12 ने भाग जाणारी पुढील 36 ही संख्या घेऊ. मग प्रत्येकाकडे असलेल्या 12 वड्यांपैकी प्रत्येकाने एकेक वडी नऊ मित्रांना दिली, तर त्या प्रत्येकाकडे 3 वड्या राहतील व प्रत्येक मित्राला तिघांकडून एकेक याप्रमाणे 3 वड्या मिळतील. म्हणून त्या तिघा मुलांकडे प्रत्येकी 12 म्हणजे एकूण 36 वड्या होत्या; ही संख्या व्यावहारिकदृष्ट्या तशी मोठी नाही. प्रत्येकाने आपल्या मित्रांना प्रत्येकी एकेक वडी दिली. (36 च्या पटीतील कोणतीही संख्या एकूण वड्यांची संख्या म्हणून घेतली, तरी प्रश्नातील अटींचे समाधान होईल.)

6) शेतकऱ्यांजवळ 3 व 5 भाकऱ्या होत्या म्हणून 32 रुपयांची वाटणी 3:5 या प्रमाणात करून चालणार नाही. याचे कारण, एकूण 8 भाकऱ्यांपैकी त्या शेतकऱ्यांनीही काही भाकऱ्या खाल्ल्या. शिकाऱ्याला किती भाकऱ्या मिळाल्या?
$8 \div 3 = 2\frac{2}{3}$ म्हणजे प्रत्येकाने $2\frac{2}{3}$ भाकऱ्या खाल्ल्या. याचा अर्थ ज्या शेतकऱ्याजवळ 3 भाकऱ्या होत्या त्याने आपल्याजवळील

$(3 - 2\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$ भाकरीच शिकाऱ्याच्या वाट्यासाठी दिली. ज्या शेतकऱ्याजवळ 5 भाकऱ्या होत्या त्याने $(5 - 2\frac{2}{3}) = \frac{7}{3}$ भाकऱ्या शिकाऱ्याच्या वाट्यासाठी दिल्या. म्हणून 32 रुपयांची वाटणी $\frac{1}{3} : \frac{7}{3}$ म्हणजेच 1 : 7 या प्रमाणात केली पाहिजे. म्हणून 3 भाकऱ्या असलेल्या शेतकऱ्याने 4 रुपये व दुसऱ्याने 28 रुपये घ्यावेत.

7) तिसऱ्या मित्राने आपला वाटा खाल्ल्यावर 8 बटाटे उरले होते, ते दोघांचा वाटा म्हणून त्याने ठेवले होते. म्हणजे दुसऱ्या मित्राने बटाटे खाल्ल्यावर 12 बटाटे उरले होते. दोघांचा वाटा म्हणून हे 12 बटाटे ठेवले. म्हणजे दुसऱ्या मित्राने आपला वाटा म्हणून 6 बटाटे खाल्ले. याचा अर्थ, पहिल्या मित्राने दोघांसाठी म्हणून 18 बटाटे ठेवले होते. म्हणजे त्याने 9 बटाटे खाल्ले. म्हणून सुरुवातीला ताटात 27 बटाटे खाणावळवाल्याने आणून ठेवले असले पाहिजेत.

12. चार बरोबर पाच?

कारण, सिद्धतेतील शेवटच्या पायरीत घोडचूक आहे.
पहिल्या पायरीत $a = b + c$ असे गृहीत धरले आहे. म्हणजेच $b + c - a = 0$. गणितात 'शून्याने भागण्याच्या क्रियेला अर्थ नसतो.' या महान दंडकाचा अवमान मिकीने शेवटच्या पायरीत केल्यामुळे त्याला 'silly mathematician' ही पदवी पिंकीने बहाल केली.

13. एक नाजूक बाब

1990 सालची गोष्ट आहे, ही बाब लक्षात घेतली, तर बाबूरावांच्या पत्नीचा जन्म याच शतकातील असावा, असे अनुमान काढल्यास चुकीचे होणार नाही.
एका मुलाचे वय 11, किंवा 12, किंवा 13 वर्षे धरले व त्याच्या वयाच्या संख्येचा घन केला तर अनुक्रमे 1331, 1728, 2197 अशा संख्या मिळतील. विसाव्या शतकातील संख्या मिळण्यासाठी 1331 ही फारच लहान, तर 2197 ही बाविसाव्या शतकात नेणारी संख्या आहे. म्हणून ज्याच्या वयाच्या संख्येचा घन करावयाचा आहे, त्या मुलाचे वय 12 वर्षेच असले पाहिजे. पत्नीचे जन्मसाल विसाव्या शतकातील असण्यासाठी दुसऱ्या

मुलाचे वय 14 वर्षे, किंवा 15 वर्षे, किंवा 16 वर्षे असावयास हवे. कारण, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$, $16^2 = 256$ यापैकी एखादी संख्या 1728 ($= 12^3$) मध्ये मिळवली, तरच 1900 व 2000 यांमधील संख्या मिळेल. वरील वर्गसंख्या 1728 मध्ये मिळवून अनुक्रमे 1924, 1953 व 1984 या संख्या मिळतात. 1984 हे जन्मसाल असणारी पत्नी व्यवहार्य ठरणार नाही. 1924 हे पत्नीचे जन्मसाल धरल्यास बाबूरावांचे जन्मसाल 1919 होईल. 15 व 12 वर्षांचे मुलगे 1990 साली असणे म्हणजे प्रौढ वयात त्या मुलांचा जन्म झाला असे होईल व तसे समजणे बाबूरावांवर अन्याय करण्यासारखे होईल.

म्हणून पत्नीचे जन्मसाल 1953, बाबूरावांचे जन्मसाल 1948. म्हणजे 1990 साली बाबूराव 42 वर्षे वयाचे, पत्नी 37 वर्षे वयाची व दोन मुलगे अनुक्रमे 15 व 12 वर्षे वयाचे होते.

14. चार एक्के

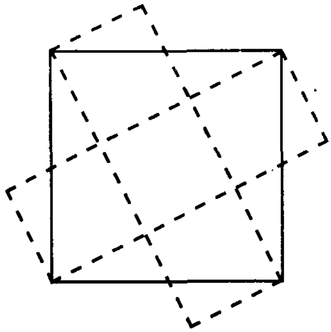
दहा ते वीस या दरम्यानच्या दोन अंकी संख्येतील अंकांची बेरीज त्या संख्येतून वजा केल्यावर (म्हणजे तेवढे पत्ते काढून मोठ्या ढिगाऱ्यावर ठेवल्यावर) वजाबाकी 9 येते. (म्हणजे काढून घेतलेले पत्ते नऊच राहतात) या गणितातील नियमाचा उपयोग या जादूत केलेला आहे. पहिल्या प्रथम जो पत्ता बाजूला काढून ठेवला त्याचा मूळच्या जोडात 9 वा क्रमांक होता. 14 पत्ते काढून वरचा पत्ता खाली असल्यामुळे त्या पत्त्याचा क्रमांक लहान ढिगात वरून सहावा झाला. 1 + 4 = 5 पत्ते बाजूला काढून सहावा पत्ता टेबलावर समोर ठेवला. अर्थातच तो एक्का होता.

दुसऱ्या खेपेला जोडातील सुरुवातीला 10 वा क्रमांक असलेला पत्ता नवव्या क्रमांकावर आला. 18 पत्ते काढून घेतले व त्यांपैकी 1 + 8 = 9 पत्ते काढून बाजूला केल्यावर वरचा पत्ता हा नवव्या क्रमांकाचा पत्ता अर्थातच दुसरा एक्का होता.

तिसऱ्या व चौथ्या वेळी मूळचे 11 व 12 या क्रमांकांचे पत्ते नवव्या क्रमांकावर येतात व आपण केलेल्या मखलाशीमुळे चारही एक्के आपल्या सेवेला हजर होतात.

16. चौरसातून चौरस

चौरसाच्या प्रत्येक बाजूचा मध्यबिंदू त्या बाजूसमोर असलेल्या एका शिरोबिंदूला



एकाच क्रमाने जोडा. तो रेषाखंड बाजूच्या मध्यबिंदूपलीकडे वाढवा. त्या रेषाखंडावर समोरच्या शिरोबिंदूमधून लंब काढा. वरील आकृतीत तुटक रेषांनी तयार झालेले पाच चौरस हे पाहिजे असलेले लहान चौरस होत.

17. नशिबाचा खेळ

(1) 11. (2) 16. (3) 216. (4) 10 व 11 ही दोन दाने सर्वांत अधिक वेळा म्हणजे 27 वेळा पडण्याची शक्यता असते. (5) 1 : 8.

19. पत्त्यांचा एक मजेशीर खेळ

दुसरा नियम लागू पडतो.

20. तराजू

सोयीसाठी गोलाच्या वजनासाठी x, घनाच्या y, दंडगोलाच्या z व शंकूच्या वजनासाठी w अशी अक्षरे वापरू. मग पहिल्या तीन तराजूंवरून खालील समीकरणे मिळतात.

$$2z + x = 3y + 2w \quad \dots\dots \text{(I)}$$
$$6x = y + z + w \quad \dots\dots \text{(II)}$$
$$z + w = 2x + y \quad \dots\dots \text{(III)}$$

आपणास $4w$ ची किंमत x,y,z च्या राशीत; पण कमीत कमी अक्षरांत काढावयाची आहे.

समीकरण (III) वरून $\quad y + z + w = 2x + 2y$ ...(y मिळवून)

म्हणून समीकरण (II) वरून $\quad 6x = 2x + 2y$

म्हणजेच $\quad y = 2x \quad \dots$ (IV)

म्हणून समीकरणे

(II) व (IV) वरून $\quad 6x = 2x + z + w$

म्हणजे $4x = z + w$, म्हणजेच $\quad 2y = z + w$

म्हणून $\quad z = 2y - w \quad \dots$ (V)

पण समीकरण (I) वरून $2z + x = 3y + 2w$

म्हणून समीकरण

(V) वरून $(4y - 2w) + x = 3y + 2w$

म्हणून $y + x = 4w$

म्हणून चौथ्या तराजूच्या रिकाम्या पारड्यात एक गोल व एक घन अशा कमीत कमी वस्तू ठेवल्या, तर तराजू समतोल होईल.

21. चक्रीय संख्या

1) 37 या संख्येच्या पहिल्या दोन पटसंख्या दोन अंकीच आहेत. तिसरी, सहावी, नववी, बारावी, पंधरावी, अठरावी, एकविसावी, चोविसावी व सत्ताविसावी या पटसंख्यांमध्ये तीनही अंक सारखे येतात. त्यामुळे त्या नऊ पटसंख्यांपासून चक्रीय परिवर्तनाने आणखी चक्रीय संख्या मिळत नाहीत; तसेच दहावी, अकरावी, एकोणिसावी, विसावी या पटसंख्यांमध्ये एक अंक शून्य असल्यामुळे त्यांच्यापासून चक्रीय संख्या मिळत नाहीत. म्हणजे 37 च्या 1 ते 27 पटसंख्यांपैकी फक्त **बारा** पटसंख्या चक्रीय संख्या आहेत.
2) वरील बारा पटसंख्यांपैकी चौथी, पाचवी, सातवी व आठवी पटसंख्या म्हणजे 148, 185, 259 व 296 या चार लहानांत लहान संख्या मूलभूत संख्या आहेत. त्यांच्यातील अंकांच्या परिवर्तनाने मिळणाऱ्या बाकीच्या आठ संख्या 481, 518, 592, 629, 814, 851, 925 व 962 या आहेत.
3) 11 या संख्येने प्रश्नातील अटींचे समाधान होते.
4) 1122 ही पाहिजे असलेली संख्या (1111+11) होय.
5) पाहिजे असलेली दोन अंकी संख्या 41 ही आहे, कारण $41 \times 271 = 11111$ व 41 आणि 271 या मूळ संख्या आहेत.
6) लहानांत लहान संख्या 11152 व मोठ्यांत मोठी संख्या 99958.

22. युगे अठ्ठावीस

1) (a) पहिल्या फेरीत बकरीला नेऊन पैलतीरावर सोडायचे व परत यायचे. दुसऱ्या फेरीत लांडग्याला नेऊन पैलतीरावर ठेवायचे व बकरीला परत आणायचे. (बकरीला **परत आणणे** हीच या उकलीतील ग्यानबाची मेख आहे.) तिसऱ्या फेरीत भाजीची टोपली नेऊन टाकायची व परत

यायचे. चौथ्या फेरीत बकरीला न्यायचे.

(b) पैलतीरी जायची फेरी परत यावयाची फेरी

पैलतीरी जायची फेरी	परत यावयाची फेरी
1) दोन्ही मुले	1) एक मुलगा
2) एक सैनिक	2) दुसरा मुलगा
3) दोन्ही मुले	3) एक मुलगा
4) दुसरा सैनिक	4) दुसरा मुलगा
5) दोन्ही मुले	5) एक मुलगा... इत्यादी

अशा प्रकारे पैलतीरी जावयाच्या विषम क्रमांकांच्या फेरीत दोन्ही मुलांनी होडी पैलतीरी नेऊन एकाने ती परत आणायची. याप्रमाणे तुकडीत कितीही सैनिक असले, तरी ते पैलतीरी जाऊ शकतील.

(c) पैलतीरी जाणे पैलतीरावरून होडी परत आणणे

पैलतीरी जाणे	पैलतीरावरून होडी परत आणणे
1) मुलगा व मुलगी	1) मुलगा
2) श्री. बडजात्या	2) मुलगी
3) मुलगा व मुलगी	3) मुलगा
4) सौ. बडजात्या	4) मुलगी
5) मुलगा व मुलगी	5) मुलगा
6) मुलगा व कुत्रा.	

(d) नवऱ्यांना H_1 व H_2 असे व त्यांच्या पत्नींना W_1 व W_2 असे संबोधू.

पायरी	**पहिला तीर**	**पैलतीर**
मूळची स्थिती :	$H_1 W_1; H_2 W_2$	–
1)	$H_2 W_2$	$H_1 W_1$
2)	H_1 ; $H_2 W_2$	W_1
3)	W_2	$H_1 W_1; H_2$
4)	$H_2 W_2$	$H_1 W_1$
5)	————	$H_1 W_1; H_2 W_2$

4) (a) त्या दोन संख्यांचा भागाकार 3 असल्यामुळे मोठी संख्या व लहान संख्या यांमधील फरक लहान संख्येच्या दुप्पट असला पाहिजे. हा फरक 3 असल्यामुळे लहान संख्या

$$= \frac{3}{2} \text{ व मोठी संख्या } \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$$

(b) पाहिजे असलेल्या संख्येच्या $\frac{1}{6}$ ला तिच्या $\frac{1}{8}$ ने गुणण्याऐवजी त्या संख्येला स्वतः तिनेच गुणले, तर येणारा गुणाकार 8 × 6 = 48 पटीने मूळच्या गुणाकारापेक्षा मोठा असेल. म्हणजेच तो गुणाकार त्या संख्येच्या 48 व्या पटीएवढा येईल. म्हणून त्या संख्येला स्वतःने गुणून आलेला गुणाकार त्या संख्येला 48 ने गुणून येणाऱ्या गुणाकाराएवढाच असेल. म्हणून ती संख्या 48 ही आहे.

(c) तो ठोकळा सपाट टेबलावर ठेवा. त्याच्या वरच्या पृष्ठाचे नऊ एकरूप भाग समांतर रेषांच्या दोन जोड्यांनी करा. त्या समांतर रेषांवर तो ठोकळा उभा कापला म्हणजे त्याचे नऊ एकरूप उभे स्तंभ होतील. आता आडव्या दोन समांतर रेषांवर ते स्तंभ कापले की, त्या ठोकळ्याचे 27 एकरूप ठोकळे होतील व प्रत्येकाची प्रत्येक कडा 3 सें.मी. लांबीची असेल. अशा तऱ्हेने सहा वेळा कापून इष्ट साध्य होईल.

(d) त्या गाड्यांचे वेग AB हे अंतर जाण्यास लागणाऱ्या वेळांच्या व्यस्त प्रमाणात असले पाहिजेत. म्हणून त्यांच्या वेगांचे गुणोत्तर 12 : 8 म्हणजेच 3 : 2 असे होते व सारख्या वेळात त्यांनी तोडलेली अंतरे त्यांच्या वेगांच्या समप्रमाणात असल्यामुळे त्या अंतरांचे गुणोत्तरसुद्धा 3:2 असे होते. म्हणून त्या गाड्यांची जेव्हा गाठ पडते तेव्हा त्यांनी आक्रमिलेली अंतरे AB या अंतराच्या अनुक्रमे $\frac{3}{5}$ व $\frac{2}{5}$ अशी असली पाहिजेत. म्हणून A पासून निघालेल्या गाडीला त्यांची गाठ होईपर्यंतचे अंतर जाण्यास 8 तासांच्या $\frac{3}{5}$ वेळ म्हणजे 4 तास 48 मिनिटे लागली असली पाहिजेत. म्हणून त्यांची गाठ सकाळी 10 वाजून 48 मिनिटांनी पडली असावी.

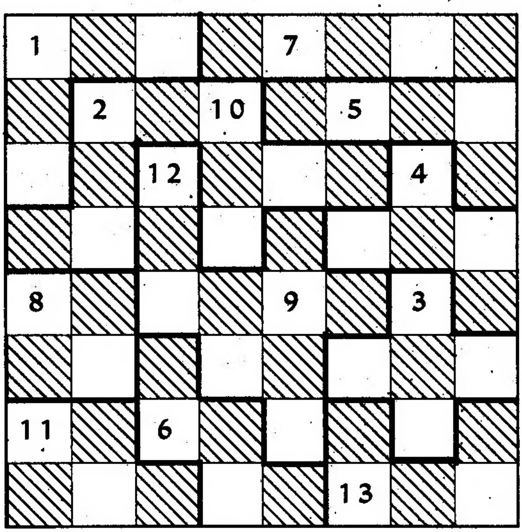
(e) नदीच्या प्रवाहविरुद्ध जाण्याचा बोटीचा वेग प्रवाहाबरोबर जाण्याच्या वेगापेक्षा कमी असला पाहिजे व तो प्रवाहाच्या ताशी वेगाच्या दुपटीने कमी असला पाहिजे. म्हणून प्रवाहाविरुद्ध 6 तास गेल्यानंतर ती बोट 2 × 6 = 12 एवढ्या प्रवाहाच्या वेगाच्या पटीने इच्छित स्थळापासून मागे राहिली असेल. ते राहिलेले अंतर बोटीने 9 − 6 = 3 तासांत तोडले. म्हणजे प्रवाहाविरुद्ध जाताना त्या बोटीचा वेग प्रवाहाच्या वेगाच्या 12:3 म्हणजे 4 पट असला पाहिजे. 9 तासांत त्या बोटीने प्रवाहाविरुद्ध

जाताना प्रवाहाच्या वेगाच्या 9 × 4 = 36 पट अंतर तोडले असले पाहिजे. लाकडाचा ओंडका प्रवाहाच्या वेगाने जाणार. त्यामुळे त्याला AB हे अंतर तोडण्यास 36 तास लागतील.

(f) प्रत्येक मुलाला दिलेल्या तीन केळ्यांपैकी एकेक केळे परत घेतले, तर 8 केळी आपल्याजवळ राहतील. म्हणून तीन तीन केळी आठ मुलांना व नवव्या मुलाला दोन केळी अशी (8 × 3) +2 = 26 केळी नेली असली पाहिजेत.

24. बुद्धीचे बळ

ते तेरा तुकडे पुष्कळ प्रकारांनी बुद्धिबळाच्या पटावर बसविता येतील. त्यांपैकी एक प्रकार खालील आकृतीत दाखवला आहे.



27. सुसम चतु:पृष्ठक

सात रंगांना 1 ते 7 हे क्रमांक देऊ. सातांपैकी चार रंग निवडण्याचे प्रकार खालीलप्रमाणे होतील.

123 यांनी सुरवात होणारे 4 गट होतील.
124 यांनी सुरवात होणारे 3 गट होतील.
125 यांनी सुरवात होणारे 2 गट होतील.

126	यांनी	सुरवात	होणारा	1	गट	होईल.
134	यांनी	सुरवात	होणारे	3	गट	होतील.
135	यांनी	सुरवात	होणारे	2	गट	होतील.
136	यांनी	सुरवात	होणारा	1	गट	होईल.
145	यांनी	सुरवात	होणारे	2	गट	होतील.
146	यांनी	सुरवात	होणारा	1	गट	होईल.
156	यांनी	सुरवात	होणारा	1	गट	होईल.
234	यांनी	सुरवात	होणारे	3	गट	होतील.
235	यांनी	सुरवात	होणारे	2	गट	होतील.
236	यांनी	सुरवात	होणारा	1	गट	होईल.
245	यांनी	सुरवात	होणारे	2	गट	होतील.
246	यांनी	सुरवात	होणारा	1	गट	होईल.
256	यांनी	सुरवात	होणारा	1	गट	होईल.
345	यांनी	सुरवात	होणारे	2	गट	होतील.
346	यांनी	सुरवात	होणारा	1	गट	होईल.
356	यांनी	सुरवात	होणारा	1	गट	होईल.
456	यांनी	सुरवात	होणारा	1	गट	होईल.
			एकूण	**35**	गट	होतील.

पण हे झाले एका बाजूने पाहिले असता होणाऱ्या गटांची संख्या. दुसऱ्या बाजूने पाहिले, तर आणखी 35 गट असतील. म्हणजे सातांपैकी चार रंग निवडण्याचे एकूण 70 प्रकार असतील. याच रीतीने सातांपैकी तीन रंग निवडण्याचे 35 गट होतील; पण त्या प्रत्येक गटाचे तीन प्रकार होतात. म्हणून सातांपैकी तीन घेतले, तर $35 \times 3 = 105$ प्रकार असतील. दोन रंग निवडण्याचे 21 गट व प्रत्येक गटाचे 3 प्रकार याप्रमाणे $21 \times 3 = 63$ प्रकार होतात. शेवटी एक रंग निवडण्याचे 7 प्रकार. याप्रमाणे, एकूण प्रकार $70 + 105 + 63 + 7 = 245$.

ही या जटिल प्रश्नाची उकल होय.

गणिती गप्पा

साध्या गप्पांमध्ये विनोदाच्या साह्याने वाचकांचे मनोरंजन करणे हा प्रधान उद्देश असतो. या गणिती गप्पामध्ये थोडाफार विनोद आहे, पण त्याचबरोबर या गप्पांमधून शाळा-कॉलेजांच्या अभ्यासक्रमाबाहेरचे गणित आहे. पण ते फारसे अवघड मात्र नाही.

गणित हा रूक्ष विषय आहे असे पुष्कळांना वाटते. गणिताचे अध्यापन बहुतांशी कंटाळवाणे होते. ह्या गप्पांचा उद्देश जरी गणित शिकविण्याचा नसला तरी गणिताचे अध्यापन कसे रोचक करता येईल त्याचा प्रत्यय या गप्पांत येईल. अर्थातच गणितांची रंजकता हा या गप्पांचा गाभा आहे. तसे असले तरी वाचकांच्या बुद्धीला खाद्य पुरविण्याचे भान ठेवले आहे.

सर्व विद्यार्थी, पालक, शिक्षक या पुस्तकांचे उत्साहाने स्वागत करतील अशी खात्री आहे.

राजा प्रकाशन
२२५/३, पांडुरंग भुवन,
लेडी जमशेटजी रोड, हरी निवास समोर,
शिवाजी पार्क, मुंबई ४०० ०१६.
दूरध्वनी : ४३० ०४०३.

गणिती गप्पा • वा. के. वाड • राजा प्रकाशन